

UNIVERSITATEA DIN BACĂU
FACULTATEA DE INGINERIE

IULIAN FLORESCU

MECANICA FLUIDELOR

**NOTE DE CURS
PENTRU UZUL STUDENȚILOR**

**Editura ALMA MATER
Bacău 2007**



Tiparul executat sub comanda nr...
UNIVERSITATEA din BACĂU
Str. Spiru Haret nr. 9 Bacău
Apărut în anul 2007

PREFAȚĂ

Odată cu celelalte discipline științifice, mecanica fluidelor s-a dezvoltat rapid în ultimul timp, numeroasele cercetări efectuate lărgind mult cunoștințele asupra comportării fluidelor, cât și a numeroaselor probleme a căror rezolvare depinde de cunoașterea acestora. Paralel a crescut și numărul aplicațiilor în diverse ramuri ale tehnicii moderne, pentru a căror dezvoltare cunoașterea fenomenelor specifice fluidelor a devenit indispensabilă.

Lucrarea este rezultatul activității didactice și științifice a autorului, profesor doctor inginer în cadrul Catedrei de Energetică, Mecatronică și Știința Calculatoarelor și se bazează pe concepția unitară de predare a acestei discipline în toate universitățile tehnice din țară.

Această lucrare încearcă să dea o prezentare a problemelor reprezentative ale disciplinei, precum și modul specific de rezolvare a lor.

Lucrarea cuprinde pe întinderea a 12 capitole probleme ale mecanicii fluidelor și o anexă cu aplicații ale principalelor capitole . Majoritatea capitolelor au un conținut teoretic pronunțat cu demonstrații relativ simple și punctate cu exemple tehnice aplicative.

Lucrarea se adresează în primul rând studenților facultăților cu profil mecanic și energetic și are ca scop aprofundarea și consolidarea sub aspect teoretic și aplicativ a cunoștințelor legate de echilibrul sau mișcarea diferitelor tipuri de fluide. Totodată oferă soluții științifice pentru alegerea unor subiecte de cercetare aprofundată și este folositoare specialiștilor din industriile de profil.

Julian Florescu

LISTA DE NOTAȚII

A	aria	n	exponentul politropic; frecvența; turația turbomașinii
At	atmosfera fizică	n_s	rapiditatea în funcție de putere
$\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$	vectorul accelerație	n_q	rapiditatea în funcție de debit
a	viteza de propagare a loviturii de berbec	n_1	turația unitară
at	atmosfera tehnică	$Oxyz$	triedrul de referință
b	lățimea deversorului;	$Ox_1y_1z_1$	triedrul atașat unui corp în mișcare
C	coeficientul lui Chézy; viteza absolută în turbomașini; centru de carenă; centrul de presiune	P	perimetrul udat;
c	viteza sunetului;	p	presiunea
D	diametrul	\bar{p}_n	tensiunea unitară de suprafață
E	energia totală unitară; modulul de elasticitate (solide)	p_a	presiunea atmosferică (p_{at})
Eu	numărul lui Euler	p_{cr}	presiunea critică
\vec{F}	forța	p_d	presiunea dinamică
\vec{F}_g	forța de greutate	p_m	presiunea manometrică
\vec{F}_m	forța masică	p_{st}	presiunea statică
\vec{F}_p	forța de presiune	Q	debitul volumic; debitul sursă punctiformă; debitul
\vec{F}_s	forța de suprafață	Q_M	debitul masic
Fr	numărul lui Froude	Q_G	debitul gravific
f	frecvența	Q_i^l	debitul unitar
\bar{f}_i	rezultanta forțelor de inerție unitare	q	debitul specific;
\bar{f}_m	rezultanta forțelor masice exterioare unitare	R	raza (cilindru, sferă); raza hidraulică; constanta gazelor perfecte; rezistența la înaintare; raza de curbură
G	centrul de greutate	\bar{R}	rezultanta forțelor exterioare
g	acclerația gravitației	Re	numărul lui Reynolds
H	sarcina hidrostatică; energia specifică; energia specifică (sarcina) turbomașinilor adâncimea;	\vec{r}	vectorul de poziție
H_0	presiunea statică	$r(\theta, z)$	coordonata cilindrică
H_s	înălțimea de aspirație	S	suprafața
H_t	sarcina unui rotor real, fluidul perfect	Sh	numărul lui Strouhal
$H_{t_{\infty}}$	sarcina teoretică a unui rotor ideal cu un număr infinit de pale;	s	elementul de arc
h_r	energia disipată (pierderea de sarcină)	T	temperatura absolută; perioada
$I_x(I_y, I_z)$	componenta impulsului pe axa Ox (Oy, Oz); momentul de inerție al suprafeței S față de Ox (Oy, Oz)	\vec{t}	vectorul tangent la arcul ds
$\vec{i}(\vec{j}, \vec{k})$	versorul axei Ox (Oy, Oz)	t	timpul
\bar{K}	momentul cinetic	U	potențialul forțelor masice
k	exponentul adiabatic	$u(v, w)$	componenta vitezei pe axa Ox (Oy, Oz)
L	lungimea; lucrul mecanic	$\vec{u}(\vec{v}, \vec{w})$	componenta pe Ox (Oy, Oz) a vitezei în mișcarea medie
l	lungimea; lucrul mecanic; lungimea de amestec (Prandtl);	$u^l(v^l, w^l)$	pulsației componente vitezei pe Ox(Oy, Oz)
l_v	lucrul mecanic unitar al forțelor de viscozitate	\bar{u}	viteza de transport la turbomașini
\bar{M}	momentul resultant	$\vec{V}(u, v, w)$	vectorul viteză
Ma	numărul lui Mach	$\vec{V}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$	vectorul viteză în mișcarea medie
\bar{M}_0	vectorul moment în raport cu punctul O	$\vec{V}^l(u^l, v^l, w^l)$	vectorul pulsație al vitezei
m	masa	V	viteza medie în secțiune
\bar{n}	vectorul normalei	v	volumul specific (masic)
		$X(Y, Z)$	coordonata carteziană; componenta forței masice unitare pe Ox (Oy, Oz); valoarea adevărată a unei măsurători
		$x(y, z)$	coordonata carteziană
		z	variabila complexă (planul z)
		$W(z, t)$	potențialul complex
		α	coeficientul lui Coriolis;

β	coeficientul de compresibilitate izotermă (modulul de compresibilitate)
Γ	circulația vectorului viteză; intensitatea vârtejului
γ	greutatea specifică
Δ	rugozitatea absolută
δ	lungimea caracteristică; grosimea stratului limită; grosimea peliculei de lubrifiant; grosimea substratului laminar; grosimea (perete);
δ_l	grosimea substratului (filmului) laminar
ε	modulul de elasticitate (fluide); coeficientul de viscozitate turbulentă (Boussinesq)
ζ	coeficientul rezistenței locale
η	viscozitate dinamică; randamentul
η_h	randamentul hidraulic
η_v	randamentul volumic
η_m	randamentul mecanic
θ	viteza de deformare volumică
λ	coeficientul lui Darcy; coeficientul pierderilor de sarcină lineare
ν	viscozitate cinematică
π	produsul criterial
ρ	densitatea
$\bar{\sigma}$	tensiunea superficială a lichidului
$\bar{\tau}$	componenta tangențială a tensiunii unitare
τ	tensiunea tangențială
$\bar{\tau}(\bar{\nu}, \bar{\beta})$	versorul axei tangențiale în triedrul lui Frenet
τ_0	tensiunea tangențială pe perete
Φ	funcția de deformare
φ	potențialul vitezelor (planul z);
ψ	funcția de curent (planul z)
$\bar{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$	vectorul vârtaj
$\bar{\omega}$	viteza unghiulară

CUPRINS

Capitolul I. NOȚIUNI INTRODUCTIVE

1.1. Generalități	11
1.2. Caracteristicile fizice ale fluidelor	12
1.3. Proprietăți fizice fundamentale ale fluidelor.....	13
1.4. Proprietăți fizice specifice lichidelor	16
1.5. Proprietăți specifice gazelor	19

Capitolul II. STATICA FLUIDELOR

2.1. Definiția și obiectul staticii fluidelor	21
2.2. Ecuațiile generale ale hidrostaticii	22
2.3. Legea fundamentală a hidrostaticii	24
2.4. Ecuația generală a hidrostaticii în câmp gravitațional	25
2.5. Echilibrul relativ al lichidelor	26
2.6. Acțiunea fluidelor în repaus pe pereți solizi	27
2.6.1. Acțiunea fluidelor în repaus pe suprafețe plane	27
2.6.2. Acțiunea fluidelor în repaus pe suprafețe curbe deschise	30
2.7. Acțiunea fluidelor în repaus pe suprafețe curbe închise	31
2.7. Plutirea corpurilor	34

3. Cinematica fluidelor	37
3.1. Noțiuni specifice	37
3.2. Mișcarea unei particule fluide	38
3.3. Ecuația continuității	43

4. Dinamica fluidelor ideale	47
4.1. Ecuațiile lui Euler	47
4.2. Relația lui Bernoulli pentru fluide ideale pe o linie de curent.....	52
4.3. Relația lui Bernoulli în mișcare semipermanentă în lungul unei traiectorii	52
4.4. Relația lui Bernoulli în mișcare potențială nepermanentă	54
4.5. Relația lui Bernoulli pentru curenți cu secțiunea finită	54
4.6. Calculul debitului prin orificii	56
4.7. Teorema impulsului și teorema momentului cinetic în cazul mișcării permanente a fluidelor	58
4.8. Teorema impulsului și teorema momentului cinetic aplicate tuburilor de curent în mișcare permanentă	61

5. Dinamica fluidelor reale	63
-----------------------------------	----

5.1. Mișcarea laminară a fluidelor reale	63
5.2. Starea de tensiune într-un fluid în mișcare	63
5.3. Ecuațiile de mișcare a fluidelor reale sub forma dată de Cauchy (în componente de tensiuni)	65
5.4. Ecuațiile Navier-Stokes pentru mișcarea laminară a fluidelor reale	66
5.5. Relația lui Bernoulli pentru o linie de curent, în mișcarea laminară a fluidelor reale	70
6. Analiza dimensională și teoria similitudinii	73
6.1. Metodele analizei dimensionale	73
6.2. Noțiuni despre similitudine	76
7. Noțiuni de teoria hidrodinamică a lubrificației	78
8. Teoria stratului limită	85
8.1. Ecuațiile de mișcare ale stratului limită	86
8.2. Desprinderea stratului limită	89
9. Mișcarea turbulentă a fluidelor reale	91
9.1. Structura mișcării turbulente	91
9.2. Tensiunea tangențială în mișcarea turbulentă	92
9.3. Distribuția vitezelor în mișcarea turbulentă	94
9.4. Ecuația Reynolds pentru mișcarea turbulentă a fluidelor reale	94
9.5. Calculul pierderilor de sarcină	96
9.6. Conducte netede și conducte rugoase; grosimea stratului laminar	97
9.7. Determinarea coeficientului pierderilor de sarcină liniare	98
9.8. Calculul pierderilor locale de sarcină	99
10. Curgerea prin orificii și ajutaje	101
10.1. Calculul debitului unui orificiu mic, sub sarcină constantă	101
10.2. Calculul debitului orificiului mare	102
10.3. Calculul debitului orificiului înecat	103
10.4. Curgerea sub sarcină variabilă, prin orificii situate la baza rezervorului. Timpul de golire al unui rezervor	104
10.5. Curgerea sub sarcină variabilă și cu debit afluent constant	105
10.6. Curgerea sub sarcină variabilă, printr-un orificiu înecat	107
10.7. Curgerea prin ajutaje	108
10.8. Jeturi de fluid	111
11. Mișcări permanente în conducte sub presiune	113
11.1. Calculul conductelor compuse în serie	114

11.2. Calculul conductelor compuse în paralel	115
11.3 Calculul conductelor cu debit continuu și terminal	116
11.4 Calculul conductelor în sifon	118
12. Mișcarea nepermanentă în conducte sub presiune	121
12.1. Lovitura de berbec în conducte sub presiune	122
12.2. Ecuațiile fenomenului lovitura de berbec	123
12.3. Soluțiile generale ale ecuațiilor cu derivate parțiale ale fenomenului lovitura de berbec	126
Bibliografie	129

1. INTRODUCERE

1.1. Generalități

Mecanica fluidelor reprezintă o diviziune a Mecanicii teoretice, care studiază mișcările, respectiv repausul fluidelor ideale sau reale, compresibile sau incompresibile, sau interacțiunea dintre fluidele în mișcare sau repaus și corpurile solide cu care acestea vin în contact.

Mecanica fluidelor se împarte în trei părți: statica, cinematica, și dinamica. Statica fluidelor studiază repausul fluidelor și acțiunile exercitate de acestea asupra suprafețelor solide cu care acestea vin în contact. Cinematica fluidelor studiază mișcarea fluidelor fără să se țină cont de forțele care intervin și modifică starea de mișcare. Dinamica fluidelor abordează mișcarea fluidelor considerând forțele care intervin și transformările energetice produse în timpul mișcării.

Denumirea de Mecanica fluidelor a apărut relativ recent (în secolul XX) și este atribuită studiului general al mișcării și al interacțiunii fluidelor cu suprafețele corpurilor solide cu care vin în contact. Inițial cu acest studiu se ocupa Hidraulica, cuvânt care derivă din grecescul *hüdraulos*, provenit din legătura a două cuvinte: *hüdor* – apă și *aulos* - conductă, și care reflectă una din primele probleme practice care a preocupat oamenii.

Această știință a cunoscut o diversificare și dezvoltare în strânsă legătură cu problemele teoretice privind Aerodinamica (stratul limită, rezistența la înaintare, teoria profilurilor aerodinamice), Hidraulica (mișcarea lichidelor cu suprafață liberă, mișcarea aluviunilor, mișcarea prin medii poroase) și Dinamica gazelor.

Datorită complexității fenomenelor apărute în mișcarea fluidelor reale, a apărut necesitatea experimentării pe modele în tunele aerodinamice și apoi pe baza teoriei similitudinii s-au extins rezultatele la problemele tehnice care au fost modelate. Rezultatele deosebite acumulate de Mecanica fluidelor au permis ca în ultimul timp să apară noi domenii tehnice precum: transportul pe apă și subacvatic, hidrotransportul, meteorologia, exploatarea modernă a zăcămintelor etc.

Astăzi Mecanica fluidelor este o disciplină mai mult teoretică, care studiază legile general valabile pentru starea de repaus sau mișcare a fluidelor. Fenomenele proprii lichidelor, gazelor sau aerului sunt studiate respectiv de hidraulică, termotehnică și aerodinamică sau de alte discipline specifice cum ar fi transferul de căldură, construcții hidrotehnice, construcții aerospațiale ș.a.

În funcție de condițiile impuse la limită se observă două feluri de aplicații ale dinamicii fluidelor și anume:

- a) curgerea fluidului în jurul unui corp solid considerat izolat (avioane, automobile, parașute) fenomen la care urmărim în mod preponderent forța necesară înaintării;
- b) corpul solid delimitează mișcarea fluidului (mișcarea în conducte, canale) la care interesează transportul de energie.

Ca o remarcă generală putem afirma că transportul energiei se realizează numai cu ajutorul fluidelor în mișcare (apă, vapori, petrol, gaz natural, aer comprimat).

Mașinile hidraulice și pneumatice, utilizează mișcarea fluidelor în domenii delimitate de frontiere solide, care pot fi și ele în mișcare. Se deosebesc mașinile care

preiau energia mecanică și o transmit fluidului (pompe, ventilatoare), cât și mașini care utilizează energia fluidului pentru a crea alte forme de energie (motoare).

S-au diversificat foarte mult domeniile în care se studiază și utilizează mișcarea fluidelor: hidrotransportul, fenomene de filtrare, poluarea, mecanica suspensiilor, aeroelasticitatea, magnetohidrodinamica și altele.

1.2. Proprietăți fizice ale fluidelor

Mecanica teoretică definește două mari categorii de corpuri materiale: corpuri solide rigide și solide deformabile și corpuri fluide, care cuprind lichidele și gazele. Față de cele trei stări de agregare cunoscute: solidă, lichidă, gazoasă, putem aminti și o a patra formă: plasma, care se definește ca o stare ale cărei proprietăți sunt determinate de existența electronilor și ionilor în stare liberă.

Fluidele sunt corpuri materiale care se caracterizează în primul rând prin proprietatea de fluiditate. Știm că moleculele unui corp au o stare de agitație neîntreruptă, care este funcție de temperatură și că între ele există forțe de atracție (de coeziune). La corpurile solide moleculele ocupă locuri bine determinate (stabile), în jurul cărora execută oscilații de amplitudine mică funcție de temperatură, aceste corpuri având formă și volum fix, sub acțiunea unor forțe exterioare.

Spre deosebire de corpurile solide, lichidele și gazele, sub influența unor forțe exterioare relativ mici, pot căpăta deformării oricât de mari, astfel încât iau forma recipientului solid în care se găsesc. În consecință lichidele și gazele nu au formă proprie și ele se caracterizează prin posibilitatea de a deplasa foarte ușor particulele din care sunt formate, datorită forțelor de coeziune mici.

Fluidele trebuie deosebite de materialele care sunt deformabile (situate între fluide și solide) cum ar fi pastele sau metalele topite, de a căror studiu se ocupă altă știință numită reologie.

Lichidele reprezintă fluide care sunt practic incompresibile și sub acțiunea forțelor gravitaționale iau forma vasului în care există fără a umple acest vas. Spre deosebire de lichide, gazele sunt fluide la care forțele de coeziune sunt mult mai mici ca la lichide și care umplu în totalitate recipientul în care se găsesc, oricare ar fi forma și dimensiunea lui.

Mecanica fluidelor studiază medii continue, omogene și izotrope. Un mediu este continuu și omogen, dacă are aceeași densitate în orice punct și este izotrop dacă prezintă aceleași proprietăți în toate direcțiile. Există la fluide linii, puncte, sau suprafețe de discontinuitate, care prezintă condiții specifice la limită.

Ipoteza de continuitate

Omogenitatea și izotropia permit ca proprietățile și relațiile stabilite pentru o particulă fluidă de dimensiuni mici determinate de condiția neglijării mișcării proprii a moleculelor sau de mișcarea browniană la gaze să fie valabile pentru tot fluidul. Ipoteza generală a continuității impune pentru mărimile fizice: densitate, viteză, presiune, temperatură, funcții care depind de coordonatele punctului și de timp și care sunt continue cu excepția unor linii, puncte, suprafețe de discontinuitate.

În studiul mecanicii fluidelor utilizăm diferite modele de fluid, în funcție de ipotezele simplificatoare pentru calcule, cum ar fi: fluid ușor (fără greutate), fluid ideal (fără viscozitate), fluid incompresibil, la care volumul unei mase determinante este

constant, fluid real (compresibil și vâscos) , fluide vâskoase și incompresibile (lichidele), fluide fără greutate dar compresibile (gazele).

Mecanica fluidelor studiază fenomenele atât cu metode experimentale cât și teoretice, de cele mai multe ori combinându-le. În studiul teoretic se utilizează teoremele generale ale mecanicii (teorema impulsului, teorema momentului cinetic, teorema energiei cinetice, legi de conservare), utilizând un calcul matematic complex. Metodele experimentale de studiu se aplică pentru verificarea calculelor teoretice, pentru determinarea unor legi generale, determinarea unor corecții utilizând modele fizice la alte scări, rezultatele extinzându-se prin similitudine.

1.3. Proprietăți fizice fundamentale ale fluidelor

a) *Densitatea* (greutatea specifică)

Densitatea se definește ca masa unității de volum:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{d m}{d V} \quad (1.1)$$

unde: Δm este masa unui element de volum ΔV .

Admițând ipoteza continuității, densitatea este o funcție continuă de coordonatele punctului și de timp: $\rho = \rho(x, y, z, t)$. Densitatea se măsoară în kg/m^3 și are aceeași valoare în orice punct al fluidului omogen.

Inversul densității se numește volum specific sau volum masic:

$$v = \frac{1}{\rho} \left[\frac{m^3}{kg} \right] \quad (1.2)$$

Greutatea specifică este greutatea unității de volum:

$$\gamma = \frac{d G}{d V} \left[\frac{N}{m^3} \right] \quad (1.3)$$

Între densitate și greutate specifică există relația:

$$\gamma = \rho \cdot g$$

Densitatea variază funcție de presiune și de temperatură. Pentru lichide variația în raport cu presiunea poate fi neglijată. Densitatea fluidului scade odată cu creșterea temperaturii. Pentru apă densitatea maximă este în jurul valorii de 4°C și are valoarea de 1kg/m^3 . Variația densității apei funcție de temperatură este redată în figura 1.

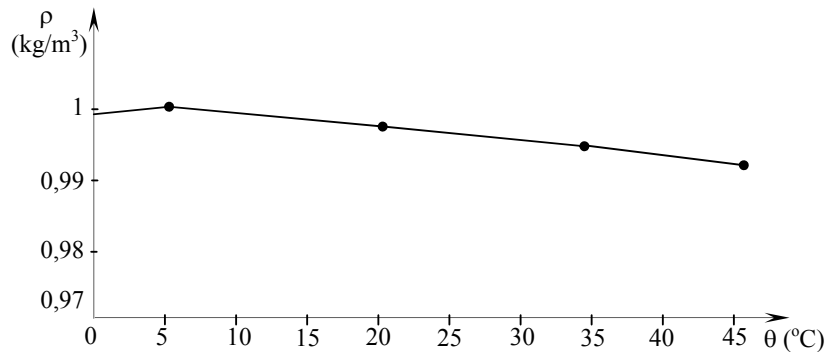


Fig. 1 Variația densității apei în funcție de temperatură

La gaze, variația densității și greutatea specifică cu temperatura și presiunea este deosebit de mare și este dată de ecuația de stare.

b) *Compresibilitatea izotermică* a fluidelor este proprietatea de variație a densității (volumului), sub influența variației presiunii.

Dacă are loc o variație de presiune Δp pentru un fluid cu volum V și presiune p , se produce o variație relativă de volum $\frac{\Delta V}{V}$ proporțională cu Δp , dată de relația:

$$\frac{\Delta V}{V} = -\alpha \cdot \Delta p \quad (1.4)$$

unde α este coeficient de compresibilitate cubică (m^2/N), iar semnul minus arată că unei creșteri a presiunii îi corespunde o scădere a volumului.

În majoritatea fenomenelor studiate considerăm lichidele ca fluide incompresibile. De exemplu apa este de 100 de ori mai compresibilă decât oțelul. Totuși există fenomene care se studiază ținând cont de compresibilitatea lichidelor, cum ar fi lovitura de berbec sau sonicitatea (teoria sonicității a fost fondată de Gogu Constantinescu în 1916, un mare savant român care a trăit în Anglia).

Gazele sunt mai compresibile decât lichidele. Se poate neglija compresibilitatea gazelor pentru viteze mai mici de $0,6 \cdot c$ (c este viteza sunetului).

Definim modulul de elasticitate cubic ca inversul modulului de compresibilitate cubică:

$$\varepsilon = \frac{1}{\alpha} = -V \frac{dP}{dV} \quad (1.5)$$

Relația poate fi exprimată și funcție de densitatea ρ . Pornind de la condiția ca în procesul de comprimare masa să rămână constantă:

$$\rho \cdot V = C \quad \text{sau:} \quad \rho \cdot dV + V \cdot d\rho = 0$$

Separând variabilele obținem: $\frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho}$

de unde:

$$\varepsilon = \rho \cdot \frac{d\rho}{\rho} \quad (1.6)$$

Știind că viteza de propagare a sunetului stabilită de Newton este: $c = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}$,

rezultă:

$$c = \sqrt{\frac{d\rho}{d\rho}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{d\rho}{d\rho}}} \quad (1.7)$$

Deoarece $\alpha = \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\rho}{d\rho}$ și la fluide incompresibile tinde către zero, rezultă

$\frac{d\rho}{d\rho} = 0$, deci $c \rightarrow \infty$, adică o propagare instantanee a sunetului, ceea ce este în

contradicție cu realitatea fizică. Prin urmare, în fenomenele legate de propagarea undelor de presiune în medii fluide este necesară considerarea proprietății de compresibilitate a fluidului.

Mișcările în fluide compresibile pot fi clasificate în funcție de viteza pe care o au față de viteza sunetului prin numărul lui Mach (Ma), care este adimensional și ne dă raportul dintre viteza v și viteza sunetului c (celeritate) în mediul respectiv:

$$Ma = \frac{v}{c} \quad (1.8)$$

Pentru $Ma < 1$, mișcarea este subsonică, iar pentru $Ma > 1$, mișcarea este supersonică.

b) Viscositatea

Proprietatea de viscozitate a fost explicată și definită diferit de oamenii de știință:

- Newton a considerat că viscozitatea este o consecință a forțelor de coeziune care reacționează la deplasarea relativă a particulelor de fluid. Această ipoteză nu poate fi valabilă pentru gaze, la care distanțele intermoleculare sunt mari și forțele de coeziune neglijabile.

- Maxwell explica viscozitatea fluidelor, prin capacitatea de a face să apară forțe, atunci când se produc variații bruște ale formei fluidului.

Putem concluziona că dacă fluidul este în mișcare, în diferite plane de separație apar forțe sau tensiuni tangențiale (forțe raportate la aria suprafeței), care se opun variației formei volumului considerat, frânează mișcarea și modifică repartiția vitezelor.

Viscozitatea reprezintă mecanismul transmiterii mișcării în fluid.

Viscozitatea se mai poate defini ca o proprietate comună tuturor fluidelor, prin care cu forțe suficient de mici se pot produce deformări oricât de mari, cu viteze de deformare mici.

Considerăm un paralelipiped dreptunghic, cu aria bazei S și înălțimea h , figura 2.

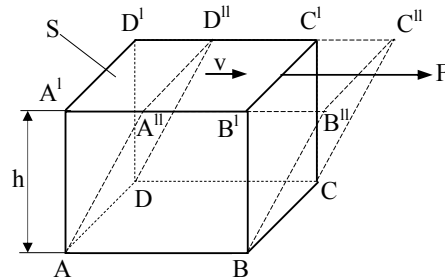


Fig. 2. Determinarea forței de viscozitate

Suprafața $A'B'C'D'$ alunecă cu viteza v față de bază, forța necesară pentru a imprima această viteză fiind:

$$F = \eta \cdot S \cdot \frac{v}{h} \quad (1.9)$$

relație care a fost determinată experimental și unde η este coeficient dependent de natura fluidului și se numește viscozitate dinamică. Stratul aderent la placă are aceeași viteză v cu placa. Atracția dintre acest strat și următorul face ca și acesta să fie antrenat cu o viteză mai mică v' , astfel încât diferența creată să producă mișcarea, ș.a.m.d.

Unitatea de măsură pentru coeficientul de vîscozitate dinamică este poise $\left(\frac{g}{cm \cdot s}\right)$ în sistemul vechi CGS, sau poiseuille $\left(\frac{kg}{m \cdot s}\right)$, în sistemul internațional. Tensiunea tangențială ce apare între două straturi înfinit vecine ($h \rightarrow dn$), ($v \rightarrow dv$) este:

$$\tau = \frac{F}{S} = \eta \cdot \frac{dv}{dn} \quad (1.10)$$

Această tensiune are tendința de a egala vitezele celor două straturi, deci se opune mișcării stratului cu viteză mai mare (are sens opus mișcării acestui strat). Fluidele ale căror tensiuni tangențiale de vîscozitate în mișcare laminară sunt date de relația (1.10), se numesc newtoniene.

Raportul dintre vîscozitatea dinamică și densitate se numește vîscozitate cinematică:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad (1.11)$$

Unitatea de măsură în sistemul internațional SI, pentru vîscozitatea cinematică este m^2/s , iar în vechiul sistem CGS este stockes (cm^2/s).

Câteva valori pentru vîscozitatea cinematică la temperatura normală pentru diferite fluide sunt prezentate în tabelul 1.

Tabelul 1

Fluidul	Apă	Benzină	Alcool	Petrol	Ulei	Glicerină	Aer
m^2/s	10^6	$0,65 \cdot 10^{-6}$	$1,33 \cdot 10^{-6}$	$2,5 \cdot 10^{-6}$	$1,7 \cdot 10^{-4}$	$8,7 \cdot 10^{-4}$	$7,4 \cdot 10^{-3}$

Variația vîscozității cu temperatura este diferită pentru lichide și gaze. La lichide ν scade cu creșterea temperaturii, iar la gaze crește.

1.4. Proprietăți specifice lichidelor

Adeziunea este proprietatea ce rezultă din atracția dintre moleculele unui fluid și cele ale suprafeței corpului solid cu care vine în contact. Dacă atracția intermoleculară a lichidului este mai mică decât cea dintre lichid și perete, atunci lichidul udă peretele (aderă la acesta). Ca exemplu putem da apa, care aderă la un perete de sticlă. În caz contrar spunem că lichidul nu udă pereții (de exemplu mercurul).

La gaze adeziunea este neglijabilă.

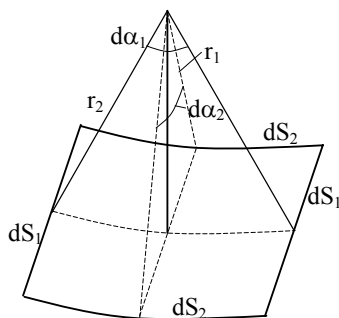


Fig. 3 Suprafață de separație în echilibru

Experimental s-a constatat că suprafața liberă a unui lichid tinde să-și micșoreze aria.

Aceasta se explică prin faptul că fiecare moleculă din suprafața de separație este atrasă de moleculele vecine, iar rezultanta acestor forțe este îndreptată spre interior. O masă oarecare de lichid își modifică forma astfel ca la un volum dat să fie suprafața minimă (de exemplu: forma sferică a picăturilor de apă). Tensiunea superficială σ , este devinită prin forța ce se exercită tangențial pe unitatea de lungime. Ea modifică presiunea în lichid. Pentru a demonstra acest lucru considerăm un element din suprafața de separație, (un dreptunghi curbiliniu) care are laturile dS_1 și dS_2 , figura 3.

$$\text{Se observă că: } d\alpha_1 = \frac{dS_1}{r_1} \quad \text{și: } d\alpha_2 = \frac{dS_2}{r_2}$$

Proiectând forțele elementare pe normală și știind că $\sin \frac{d\alpha_1}{2} = \frac{d\alpha_1}{2}$ și $\sin \frac{d\alpha_2}{2} = \frac{d\alpha_2}{2}$, obținem:

$$\begin{cases} 2 \cdot \sigma \cdot dS_1 \frac{d\alpha_2}{2} = \sigma \cdot dS_1 \frac{dS_2}{r_2} \\ 2 \cdot \sigma \cdot dS_2 \frac{d\alpha_1}{2} = \sigma \cdot dS_2 \frac{dS_1}{r_1} \end{cases} \quad (1.12)$$

Suma acestor două forțe trebuie să echilibreze forța care rezultă din diferența de presiune de pe cele două fețe ale suprafeței de separație Δp :

$$\Delta F = \Delta p \cdot dS_1 \cdot dS_2 = \sigma \left(dS_1 \frac{dS_2}{r_2} + dS_2 \frac{dS_1}{r_1} \right)$$

După simplificări rezultă:

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (1.13)$$

relație care este cunoscută sub denumirea de formula lui Laplace.

Capilaritatea reprezintă consecința tensiunii superficiale pentru tuburi subțiri.

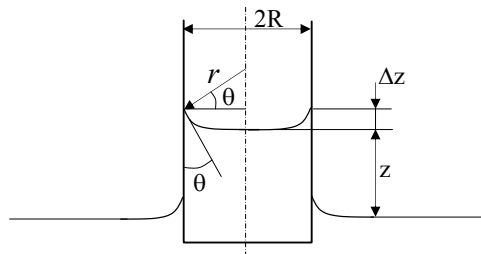


Fig. 4 Tub capilar

Dacă introducem în apă un tub de sticlă de diametru mic (sub un milimetru) apa udă bine sticla, formând un menisc concav, iar diferența de presiune este îndreptată în sus, apa urcând în tub până ce diferența de nivel z echilibrează această diferență de presiune, figura 4.

$$(\gamma_1 - \gamma_2) \cdot z = \sigma \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (1.14)$$

unde: γ_1 și γ_2 sunt greutatele specifice ale apei, respectiv aerului.

Considerând că suprafața meniscului are aproximativ forma unei calote sferice, ($r_1 = r_2 = R$), relația 1.14 devine:

$$\sigma = \frac{r}{2} (\gamma_1 - \gamma_2) \cdot z = \frac{R}{2 \cos \theta} (\gamma_1 - \gamma_2) \cdot z$$

unde R este raza tubului și θ este unghiul de contact al apei cu tubul. Neglijând γ_2 în raport cu γ_1 , putem scrie că:

$$\sigma = \frac{R \cdot \gamma \cdot z}{2 \cos \theta}$$

iar dacă $\theta \rightarrow 0$, obținem legea lui Jurin întâlnită în fizică:

$$z = h = \frac{2\sigma}{\gamma \cdot R} = \frac{2\sigma}{\rho \cdot g \cdot R} \quad (1.15)$$

Pentru lichide neaderente (mercurul față de sticlă), meniscul este convex iar în tubul capilar se formează o denivelare ($z < 0$).

Studiul fenomenelor capilare prezintă importanță în studiul fenomenelor de infiltrații, în măsurători efectuate cu aparate ce cuprind tuburi capilare ș.a.

Absorția și degajarea gazelor

Majoritatea gazelor se dizolvă (pătrund prin difuziune) în lichide. Absorția este un proces fizico-chimic și se produce dacă concentrația componentelor gazelor este mai mare decât cea corespunzătoare lichidului la presiunea și temperatura respectivă. Absorbția crește odată cu creșterea presiunii și scade odată cu creșterea temperaturii. La presiune și temperatură normală în apă se dizolvă 2% gaze în greutate: astfel este posibilă viața florei și faunei acvatice.

Dacă componenta fazei absorbante (lichidul) este mai mare decât cea a fazei absorbate (gazul) fenomenul se produce invers și se numește desorbție. Desorbția crește odată cu creșterea presiunii.

Dacă în anumite porțiuni ale unui lichid în mișcare presiunea scade până la valoarea presiunii de vaporizare la temperatura dată se produce vaporizarea lichidului însoțit de degajare de gaze dizolvate. Apare fenomenul numit cavitație, un fenomen care este dăunător pentru mașinile și instalațiile hidraulice.

Bulele de vapor și de gaz, ajung în zone cu presiuni mai mari și se recondensează producând suprapresiuni și creșteri de temperatură mari, precum și zgomote. Această ipoteză nu a putut explica de ce metalele cu rezistență mecanică mai mică sunt mai rezistente decât metalele cu rezistență mecanică mare (de exemplu: bronzul față de oțel).

O altă ipoteză, chimică, explică distrugerea metalelor prin faptul că vaporii și gazele degajate pun în libertate oxigenul atomic, care este foarte activ chimic și corodează metalul.

Ipoteza termochimică pune la baza fenomenului temperaturile foarte mari (mii de grade) care apar.

Există și o ipoteză electrică a fenomenului de cavitație, care se bazează pe diferența de potențial dintre bulele de gaz și lichid.

Cavitația este un fenomen complex, care se aplică prin ansamblul tuturor acestor ipoteze.

Presiunea de vaporizare crește odată cu temperatura unui lichid și este mai mare pentru aceeași temperatură la lichidele volatile, figura 5.

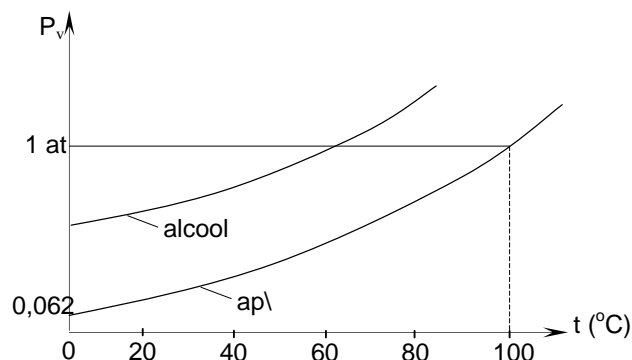


Fig. 5 Variația presiunii de vaporizare în funcție de temperatură

1.5. Proprietăți specifice gazelor

Gazele datorită spațiilor intermoleculare mari sunt fluide mult mai ușoare și mai compresibile decât lichidele. Gazele ocupă prin expansiune tot volumul disponibil (coeziunea este neglijabilă).

Datorită compresibilității accentuate, densitatea variază mult cu presiunea la o temperatură dată. Ecuația de stare Clapeyron-Mendeleev se exprimă pentru o masă de gaz m dată, de volum V :

$$p \cdot V = m \cdot R \cdot T$$

sau:

$$p = \rho \cdot R \cdot T \quad (1.16)$$

Înlocuim pe R cu $\frac{\Re}{\mu}$ obținem:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\Re}{\mu} T$$

unde: \Re este constanta universală a gazelor perfecte $\left(8,31 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}^\circ\text{K}}\right)$, iar μ este masa molară.

Gazele care satisfac ecuația (1.21) se numesc *gaze perfecte*. Dacă se ia în considerație expresia densității $\rho = \frac{m}{V}$ ecuația (1.20) se scrie sub forma

$$pV = mRT = \frac{m}{\mu} \Re T. \quad (1.17)$$

În studiul repausului sau al mișcării unui gaz perfect (fără frecări sau șoc) se deosebesc următoarele legi de variație a densității în funcție de presiune: *izocora* $\rho =$

const., *izoterma* $\frac{p}{\rho} = \text{const.}$, *adiabata* (în care gazele nu schimbă căldură cu mediul exterior) $\frac{p}{\rho^k} = \text{const.}$, unde k este exponentul adiabatic și *politropa* $\frac{p}{\rho^n} = \text{const.}$, unde n este exponentul politropic.

Dacă într-un volum dat se află un amestec de gaze atunci presiunea parțială a fiecărui gaz este egală cu presiunea pe care ar exercita-o dacă ar ocupa singur întregul volum, iar presiunea totală este egală cu suma presiunilor parțiale (*legea lui Dalton*).

2. STATICA FLUIDELOR

2.1. Definiția și obiectul staticii fluidelor

Statica fluidelor studiază echilibrul fluidelor și acțiunea pe care acestea le exercită asupra corpurilor solide cu care vin în contact.

Într-un fluid în repaus nu apar forțe de viscozitate, ele fiind condiționate de deplasarea relativă a particulelor. Rezultă că în starea de repaus proprietatea de viscozitate nu se manifestă și prin urmare relațiile din statica fluidelor sunt stabilite pentru fluidele perfecte (pentru fluide incompresibile și compresibile).

Un fluid în repaus se manifestă ca un fluid ideal (nevâscos) relațiile fiind valabile și pentru fluide reale (vâscoase).

Un fluid în repaus este acționat de două categorii de forțe, care îl echilibrează: forțele masice și forțele de suprafață.

Forțele masice sunt analoage celor întâlnite în mecanica corpurilor rigide și se datorează prezenței câmpurilor exterioare. Cele mai obișnuite forțe masice întâlnite sunt cele de greutate datorate câmpului gravitațional exterior masei de fluid considerate. În cazul unui repaus relativ (fluidul se află în repaus față de un sistem de referință mobil care execută o mișcare accelerată față de un sistem de referință fix), pe lângă forțele de greutate apar și forțele de inerție.

Forțele de suprafață joacă rolul forțelor de legătură din mecanica rigidului. Pentru un fluid în repaus forțele de suprafață sunt forțe de presiune fiind compresiuni normale la elementele de suprafață. Pentru a demonstra acest lucru separăm cele două porțiuni A și B ale unui fluid aflat în echilibru prin secțiunea S figura 6.

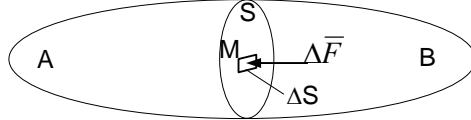


Fig. 6 Echilibrul unei particule de fluid

Fiecare dintre cele două porțiuni trebuie să fie în echilibru. Considerând echilibrul porțiunii A, putem înlocui efectul porțiunii B printr-o forță de suprafață care este o compresiune. O forță elementară $\Delta \vec{F}$ este normală la elementul de suprafață ΔS deoarece în cazul în care ar fi înclinată componenta sa tangențială ar strica echilibrul fluidului.

Prin definiție presiunea în punctul M este:

$$p(M) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS} \quad (2.1)$$

Rezultă că presiunea este în funcție de coordonatele punctului, valoarea ei nu depinde de orientarea arbitrară a secțiunii S care trece prin punctul M. Presiunea într-un punct fiind aceeași pe orice direcție, este o mărime scalară. Pentru a demonstra aceasta detașăm din fluidul în echilibru tetraedrul OABC așa cum rezultă din figura 7.

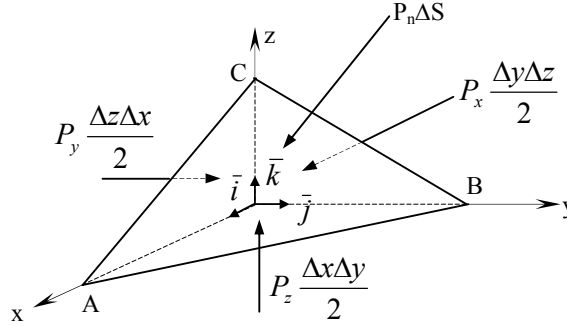


Fig. 7 Particulă de fluid în echilibru

Introducem pe fețele tetraedrului forțele elementare de presiune (compresiuni normale). Considerăm \bar{n} normala la suprafața ABC (dirijată spre exteriorul volumului de fluid) și ΔS mărimea acestei suprafețe.

Considerăm forța masică (elementară) unitară $\bar{f}_m(X, Y, Z)$ și p_x, p_y, p_z, p_n presiunile în lungul axelor de coordonate și al normalei, ecuațiile de echilibru pe direcțiile axelor sunt:

$$\begin{cases} p_x \frac{\Delta y \Delta z}{2} - p_n \Delta S \cdot \cos(\bar{n}, \bar{i}) + \rho X \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{6} = 0 \\ p_y \frac{\Delta z \Delta x}{2} - p_n \Delta S \cdot \cos(\bar{n}, \bar{j}) + \rho Y \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{6} = 0 \\ p_z \frac{\Delta x \Delta y}{2} - p_n \Delta S \cdot \cos(\bar{n}, \bar{k}) + \rho Z \frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{6} = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Deoarece:

$$\Delta S \cdot \cos(\bar{n}, \bar{i}) = \frac{\Delta y \Delta z}{2}, \quad \Delta S \cdot \cos(\bar{n}, \bar{j}) = \frac{\Delta z \Delta x}{2}, \quad \Delta S \cdot \cos(\bar{n}, \bar{k}) = \frac{\Delta x \Delta y}{2}$$

$$\text{rezultă: } p_x - p_n = \rho X \frac{\Delta x}{3}, \quad p_y - p_n = \rho Y \frac{\Delta y}{3}, \quad p_z - p_n = \rho Z \frac{\Delta z}{3}$$

Trecând la limită, tetraedrul tinzând în toate direcțiile (după x, y, z), către punctul M obținem:

$$p_x = p_y = p_z = p_n = p(M) = p(x, y, z) \quad (2.3)$$

Rezultatul este independent de înclinarea feței ABC, deci presiunea într-un fluid în repaus este un scalar.

2.2. Ecuațiile generale ale hidrostatiei

(ecuațiile lui Euler pentru statica fluidelor)

Ecuațiile pentru echilibrul fluidelor se obțin din anularea rezultantei forțelor ce acționează asupra maselor de fluid. Considerăm o particulă fluidă de forma unui paralelipiped desprinsă dintr-un fluid aflat în echilibru de dimensiuni d_x, d_y, d_z , și densitate ρ , figura 8.

Rezultanta forțelor masice unitare $\bar{f}_m(X, Y, Z)$, acționează în centrul de masă al particulei considerate și are expresia:

$$d\bar{F}_m = \bar{f}_m \cdot d_m = \bar{f}_m \cdot \rho \cdot dx dy dz \quad (2.4)$$

și are componentele:

$$dF_{mx} = \rho X \cdot dx dy dz, \quad dF_{my} = \rho Y \cdot dx dy dz, \quad dF_{mz} = \rho Z \cdot dx dy dz. \quad (2.5)$$

Forțele de suprafață sunt forțe de presiune datorate acțiunii fluidului asupra particulei considerate. Știind că forțele de presiune sunt proporționale cu mărimea suprafețelor elementare considerate și că presiunea este în funcție de coordonatele punctului în spațiu, $p = p(x, y, z)$, atunci forțele de presiune pe fețele determinate de planele sistemului de referință se pot exprima astfel: $p \cdot dy dz$, $p \cdot dx dz$, $p \cdot dx dy$

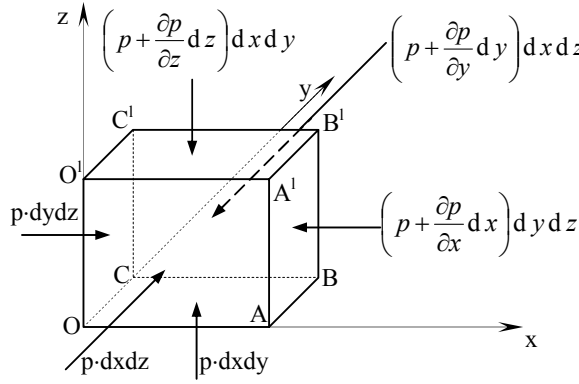


Fig. 8 Particulă de fluid în echilibru

La presiunile pe fețele opuse se adaugă creșterile parțiale datorate variațiilor obținute prin deplasarea în cele trei direcții, obținându-se:

$$\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) \cdot dy dz, \quad \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} dy\right) \cdot dx dz, \quad \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz\right) \cdot dx dy$$

Condiția de echilibru după axa Ox va fi:

$$p \cdot dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) \cdot dy dz + \rho X \cdot dx dy dz = 0 \quad (2.6)$$

$$\text{sau: } \begin{cases} -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz + \rho X \cdot dx dy dz = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz + \rho Y \cdot dx dy dz = 0 \\ -\frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz + \rho Z \cdot dx dy dz = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

În mod analog s-a calculat după Oy și Oz.

După simplificare cu dx, dy, dz , ecuațiile diferențiale de echilibru după cele trei axe sunt:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z \quad (2.8)$$

Cele trei ecuații exprimă condițiile de echilibru ale volumului de fluid considerat, între forțele de presiune și forțele masice. Acestea sunt ecuațiile generale ale hidrostaticii – ecuațiile cu derivatele parțiale de ordinul I, stabilite de Euler pentru echilibrul fluidului. A găsi condiția de integrabilitate a acestui sistem înseamnă a preciza condițiile pe care trebuie să le îndeplinească forța masică unitară $\vec{f}_m(X,Y,Z)$ pentru ca sub acțiunea sa fluidul să rămână în echilibru.

Înmulțim cele trei ecuații, respectiv prin dx , dy , dz , le adunăm și obținem:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = \rho (X dx + Y dy + Z dz) \quad (2.9)$$

Membrul stâng al egalității reprezintă diferențiala totală a presiunii p , astfel putem scrie:

$$dp = (X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz) \quad (2.10)$$

Ecuația reprezintă expresia variației de presiune între două puncte ale unui fluid situate la distanța elementară ds care are proiecțiile dx , dy , dz .

Deoarece membrul stâng al egalității este o diferențială totală, expresia are sens dacă paranteza din membrul drept este o diferențială totală a unei funcții de x , y , z în același domeniu.

Considerăm o funcție scalară $U(x,y,z)$ uniformă în domeniul dat.

Dacă componentele forței masice unitare X , Y , Z pot fi exprimate ca derivate parțiale ale funcției U în raport respectiv cu x , y , z , putem scrie:

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad (2.11)$$

$$\text{sau: } \vec{f}_m = -\text{grad}U \quad (2.12)$$

unde U reprezintă potențialul forțelor masice exterioare.

Aceasta reprezintă condiția necesară și suficientă pentru ca un câmp de forțe masice unitare să determine echilibrul unui fluid, adică trebuie să fie potențial. Spre exemplu, câmpul gravitațional este potențial deci sub acțiunea sa un fluid poate fi în echilibru.

2.3. Legea fundamentală a hidrostaticii

Dacă înlocuim în relația (2.10), expresiile din relația (2.11), obținem:

$$dp + \rho \cdot dU = 0 \quad (2.13)$$

iar prin integrare:

$$p + \rho \cdot U = Ct \quad (2.14)$$

care reprezintă legea fundamentală a hidrostaticii. O remarcă generală este: dacă un fluid se află în repaus față de un sistem de referință fix (sau sistem inerțial) singurele forțe masice care apar în fluid sunt forțele de greutate (create de câmpul gravitațional); în cazul unui echilibru relativ apar în plus și forțele de inerție.

Consecințele legii fundamentale a hidrostaticii

1) Dacă în ecuația (2.10), considerăm $dp = 0$, ($p = ct$), se obține $X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz = 0$ (deoarece $\rho \neq 0$), care reprezintă ecuația diferențială a suprafețelor de egală presiune, numite și suprafețe izobare.

Definim suprafața echipotențială locul geometric al punctelor în care potențialul forțelor masice este constant.

Dacă fluidul este incompresibil ($\rho = ct$), pentru $U = Ct$ se obține $p = ct$, deci într-un fluid în repaus absolut suprafețele echipotențiale sunt și izobare.

2) Din relația (1.13) rezultă că forța masică ce acționează asupra unei particule fluide este normală la suprafața echipotențială (izobară) ce trece prin punctul de aplicație al forței și este îndreptată în sensul scăderii potențialului, deci în sensul creșterii presiunii.

3) Suprafețele echipotențiale nu se intersectează deoarece presiunea fiind un câmp scalar este unică într-un punct după orice direcție și deci în punctul respectiv nu pot exista două potențiale egale.

4) O suprafață izobară este și izodensă ($\rho = ct$); afirmația este evidentă pentru un fluid incompresibil la care $\rho = ct$ în toată masa deci și pe suprafața izobară.

5) Temperatura pe o suprafață echipotențială este constantă deoarece p și ρ fiind constante din ecuația lui Clapeyron-Mendeleev rezultă:

$$T = \frac{p}{R\rho} = ct. \quad (2.15)$$

6) Suprafața de separație dintre două fluide imiscibile cu densitățile $\rho_1 \neq \rho_2$ este echipotențială; de asemenea și dintre un lichid și un gaz. Considerând că între două puncte infinit vecine ale acestei suprafețe diferența de presiune este aceeași, indiferent în ce fluid este calculată: $dp = -\rho_1 dU = -\rho_2 dU$. Rezultă că:

$$(\rho_1 - \rho_2) \cdot dU = 0 \quad (2.16)$$

de unde: $dU = 0$, deci $U = ct$.

7) Dacă forțele masice sunt neglijabile în raport cu cele de presiune presiunea în fluid este constantă.

În acest caz, dacă $\vec{f}_m = 0$ rezultă din relația (2.11) că $U = ct$, deci conform relației (2.14), $p = ct$ (conform primei consecințe). Rezultă că dacă într-o zonă a fluidului are loc o suprapresiune Δp aceasta se transmite în toată masa fluidului. Această consecință poartă numele de “principiul” lui Pascal.

2.4. Ecuația generală a hidrostaticii în câmp gravitațional

Particularizăm componentele forței masice unitare pentru câmpul gravitațional $X = 0$, $Y = 0$ și $Z = -g$.

$$\text{Rezultă că: } \vec{f}_m = -g\vec{k} \quad (2.17)$$

$$\text{Integrând obținem: } U = - \int_{(D)} (-g) dz = gz + C \quad (2.18)$$

$$\text{Ecuația fundamentală a hidrostaticii } \frac{p}{\rho} + U = C, \text{ devine } \frac{p}{\rho} + gz = C \text{ sau}$$

$p + \gamma \cdot z = C^l$. Putem scrie relația sub forma:

$$\frac{p}{\gamma} + z = ct \quad (2.19)$$

în care termenii au dimensiuni de lungime.

Considerând un fluid în repaus absolut, figura 9 putem scrie relația (2.19) pentru două puncte ale fluidului A și B:

$$\frac{p_A}{\gamma} + z_A = \frac{p_B}{\gamma} + z_B \quad \text{\textit{Știind că } } p_A = p_o \text{ relația devine:}$$

$$p_B = p = p_o + \gamma(z_A - z_B) = p_o + \gamma \cdot h \quad (2.20)$$

Se observă că presiunea crește liniar cu adâncimea. Unghiul pe care îl face graficul cu verticala este:

$$\tan \theta = \lambda \cdot \frac{\gamma \cdot H}{H} = \lambda \gamma \quad (2.21)$$

deci $\tan \theta$ este proporțională cu γ , λ fiind un coeficient ce rezultă în raport de scările alese.

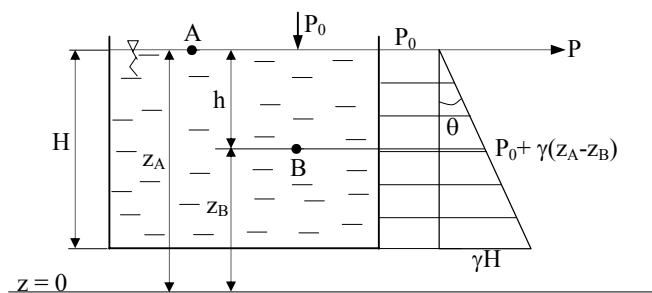


Fig. 9 Distribuția de presiuni într-un lichid în repaus

În cazul mai multor lichide imiscibile în repaus ele se așează în ordinea greutăților lor specifice, fig. 10.

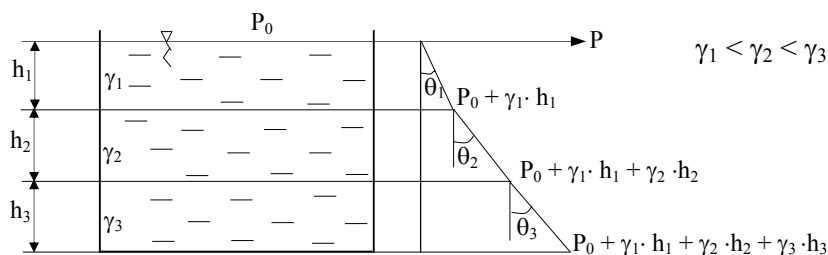


Fig. 10 Distribuția de presiuni în cazul a trei lichide imiscibile

$z = \text{ct}$ rezultă $p = \text{ct}$.

Într-un lichid în repaus planele orizontale sunt plane izobare. De aici două consecințe:

- suprafața liberă a lichidelor este orizontală (principiul vaselor comunicante)
- suprafața de separație dintre două lichide imiscibile este un plan orizontal.

2.5. Echilibrul relativ al lichidelor

Asupra unui lichid aflat în echilibru relativ față de un sistem de referință ce se mișcă accelerat în raport cu un sistem fix, acționează forțe masice de greutate și forțe masice de inerție. Notăm forțele masice absolute (de greutate) cu $\vec{f}_m(X, Y, Z)$ și forțe de inerție unitare cu $\vec{f}_i(X_i, Y_i, Z_i)$, rezultă:

$$\vec{f}_m + \vec{f}_i = -\text{grad} \bar{U}$$

unde U este potențialul forțelor masice, sau:

$$X + X_i = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y + Y_i = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z + Z_i = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad (2.22)$$

Pentru deducerea ecuației suprafeței libere unde $p = p_0$, din ecuația de echilibru $p + \rho U = C$ rezultă:

$$U(x, y, z) = C^1 \quad (2.23)$$

Rezolvarea unei probleme de echilibru relativ necesită parcurgerea următoarelor etape:

- se alege un sistem de axe legat de vasul în care se găsește lichidul;
- se determină accelerația (forța de inerție unitară) pentru o particulă de fluid, în funcție de coordonatele sale: $\vec{f}_i = -\vec{a}(x, y, z)$ și forța de greutate unitară $\vec{f}_m = \vec{g}$;
- se determină potențialul U cu expresia:

$$U = -\int (X + X_i) dx + (Y + Y_i) dy + (Z + Z_i) dz;$$
- în relația (2.23), constanta C^1 se determină din condiția ca volumul în echilibru absolut să fie același cu cel din echilibru relativ;
- se determină repartitia presiunilor pe pereții vaselor.

2.6. Acțiunea fluidelor în repaus pe pereți solizi

Acțiunea fluidelor asupra unui perete solid cu care este în contact se calculează însumând forțele elementare de presiune:

$$d\vec{F}_p = -p \cdot \vec{n} dS \quad (2.24)$$

unde \vec{n} este normala la suprafața elementară dS a peretelui orientat spre fluid.

Dacă suprafața este oarecare, forțele elementare de presiune sunt oarecare în spațiu și efectul lor este un torsor format de rezultanta forțelor și momentul rezultat în raport cu originea sistemului ales:

$$\vec{F}_p = -\int_S p \vec{n} dS \quad (2.25)$$

$$\vec{M}_o = -\int_S \vec{r} \times p \vec{n} dS \quad (2.26)$$

Considerând că se cunoaște repartitia de presiuni din starea de repaus a fluidului, vom analiza starea de echilibru absolut.

2.5.1. Acțiunea fluidelor în repaus pe suprafețe plane

Normala \vec{n} în acest caz este constantă și deci forțele de presiune sunt paralele și de același sens:

$$\vec{F}_p = \vec{n} \int_S p dS \quad (2.27)$$

Rezultanta este o forță normală la suprafață, orientată dinspre fluid spre perete:

$$\vec{M}_o = \vec{n} x \int_S \vec{r} p dS \quad (2.28)$$

Considerăm că rezultanta forțelor de presiune are punctul de aplicație în C, numit și centrul de presiune, momentul rezultantei este:

$$\bar{M}_o^I = \bar{r}_C \times \bar{F}_p = \bar{n} x \bar{r}_C \int_S p \, dS \quad (2.29)$$

Conform teoremei lui Varignon pentru sisteme de forțe paralele cele două momente sunt egale: $\bar{M}_o = \bar{M}_o^I$ (2.30)

$$\text{rezultă:} \quad \bar{r}_C = \frac{\int_S \bar{r} p \, dS}{\int_S p \, dS} \quad (2.31)$$

Relația (2.31) reprezintă expresia vectorului de poziție al centrului de presiune.

a. Acțiunea unui fluid ușor în repaus pe o suprafață plană

În acest caz presiunea este constantă și rezultă:

$$\bar{F}_p = -\bar{n} p \int_S dS = -\bar{n} p S \quad (2.32)$$

$$|F_p| = pS$$

$$\bar{r}_C = \frac{\int_S \bar{r} \, dS}{\int_S dS} = \bar{r}_G \quad (2.33)$$

Acțiunea unui fluid ușor în repaus pe o suprafață plană este o forță normală la suprafață, de mărime pS , care se aplică în centrul de greutate al suprafeței.

b. Acțiunea unui fluid greu în echilibru pe o suprafață plană

Considerăm un vas cu un perete înclinat și alegem un sistem de axe convenabile conform figurii 12. În cazul fluidului greu presiunea este $p = \gamma \cdot h$

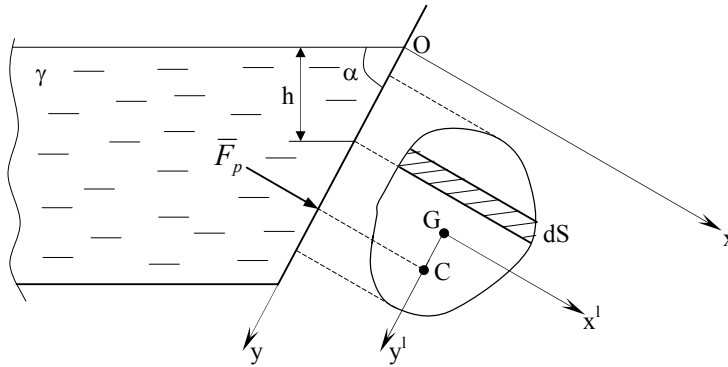


Fig. 12 Acțiunea unui lichid pe un perete plan înclinat

$$\bar{F}_p = -\bar{n} \gamma \int_S h \, dS = -\bar{n} \gamma \int_S y \sin \alpha \, dS = -\bar{n} \gamma \sin \alpha \int_S y \, dS \quad (2.34)$$

unde: $\int_S y \, dS$ este momentul static al ariei S în raport cu axa x și putem scrie:

$$\int_S y \, dS = y_G \cdot S \quad (2.35)$$

$$\text{deci: } \bar{F}_p = -\bar{n} \gamma (y_G \sin \alpha) S = -\bar{n} \gamma \cdot h_G \cdot S \quad (2.36)$$

Rezultanta forțelor de presiune este normală la suprafață și are valoarea egală cu greutatea unui cilindru de lichid având aria secțiunii egală cu S și înălțimea egală cu adâncimea centrului de greutate al suprafeței S .

Poziția centrului de presiune se determină în modul următor:

$$\bar{r}_C = \frac{\gamma \int_S \bar{r} h \, dS}{\gamma \int_S h \, dS} = \frac{\int_S \bar{r} y \sin \alpha \, dS}{\int_S y \sin \alpha \, dS} = \frac{\int_S \bar{r} y \, dS}{\int_S y \, dS} = \frac{\int_S \bar{r} y \, dS}{y_G \cdot S}$$

Rezultă coordonatele centrului de presiune C , punctul de aplicație a forței F_p :

$$x_C = \frac{\int_S xy \, dS}{y_G S} \quad \text{și} \quad y_G = \frac{\int_S y^2 \, dS}{y_G S} \quad (2.37)$$

unde $\int_S xy \, dS = I_{xy}$ este momentul de inerție centrifugal al ariei S și $\int_S y^2 \, dS = I_x$ este momentul de inerție al ariei S față de axa x .

$$\text{Rezultă: } x_C = \frac{I_{xy}}{y_G S} \quad y_C = \frac{I_x}{y_G S} \quad (2.38)$$

Dacă alegem convenabil sistemul de axe (axe de simetrie), $I_{xy} = 0$ deci și $x_C = 0$.

Putem aplica teorema lui Steiner:

$$I_x = I_x^l + y_G^2 \cdot S \quad (2.39)$$

$$\text{de unde: } y_C = y_G + \frac{I_x^l}{y_G S} \quad (2.40)$$

În cazul în care pe suprafața liberă a lichidului se exercită o presiune relativă p_1 formulele stabilite sunt valabile dacă sistemul de referință se alege cu Ox la nivelul presiunii atmosferice, deci la înălțimea $h_1 = \frac{p_1}{\gamma}$.

Dacă peretele de suprafață S este orizontal C coincide cu G și presiunea este constantă pe toată suprafața.

În cazul fundului unui rezervor presiunea are mărimea γSH , unde S este aria secțiunii, H este înălțimea lichidului și nu depinde de forma vasului, figura 13.

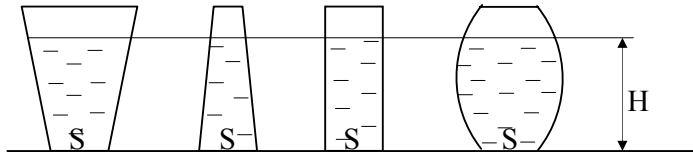


Fig. 13 Paradox hidrostatic

Este un paradox hidrostatic deoarece forța de presiune în mod aparent ar trebui să fie egală cu greutatea lichidului din fiecare vas.

2.6.2. Acțiunea fluidelor în repaus pe suprafețe curbe deschise

Torsorul forțelor de presiune poate fi echivalat cu un sistem de trei ecuații:

$$\begin{cases} dF_{p_x} = d\bar{F}_p \cdot \bar{i} = -p(\bar{n}, \bar{i})dS = -p dS_{yoz} \\ dF_{p_y} = d\bar{F}_p \cdot \bar{j} = -p(\bar{n}, \bar{j})dS = -p dS_{zox} \\ dF_{p_z} = d\bar{F}_p \cdot \bar{k} = -p(\bar{n}, \bar{k})dS = -p dS_{xoy} \end{cases} \quad (2.41)$$

unde: dS_{yoz} , dS_{zox} , dS_{xoy} sunt proiecțiile elementului de suprafață dS al peretelui respectiv pe planele yoz , zox , xoy .

Rezultă:

$$F_{p_x} = - \int_{S_{yoz}} p dS_{yoz}; \quad F_{p_y} = - \int_{S_{zox}} p dS_{zox}; \quad F_{p_z} = - \int_{S_{xoy}} p dS_{xoy} \quad (2.42)$$

Suportul forței F_{p_x} trece prin centrul de presiune C^I , respectiv F_{p_y} prin C^{II} și F_{p_z} prin C^{III} , vectorii de poziție fiind determinați cu relațiile:

$$\bar{r}_{C^I} = \frac{\int \bar{r} p dS_{yoz}}{\int p dS_{yoz}}; \quad \bar{r}_{C^{II}} = \frac{\int \bar{r} p dS_{zox}}{\int p dS_{zox}}; \quad \bar{r}_{C^{III}} = \frac{\int \bar{r} p dS_{xoy}}{\int p dS_{xoy}} \quad (2.43)$$

Forțele care înlocuiesc torsorul trec prin centrele de presiune ale proiecțiilor suprafeței curbe ale peretelui pe planele de coordonate.

a) Acțiunea fluidelor ușoare în repaus pe pereți curbi deschiși

În acest caz $p = \text{ct.}$, deci putem scrie:

$$F_{p_x} = -pS_{yoz}; \quad F_{p_y} = -pS_{zox}; \quad F_{p_z} = -pS_{xoy} \quad (2.44)$$

respectiv:

$$\bar{r}_{C^I} = \frac{\int \bar{r} dS_{yoz}}{S} = \bar{r}_{G^I}; \quad \bar{r}_{C^{II}} = \bar{r}_{G^{II}}; \quad \bar{r}_{C^{III}} = \bar{r}_{G^{III}} \quad (2.45)$$

Forțele echivalente cu torsorul sunt paralele cu axele de coordonate și trec prin centrele de greutate ale proiecțiilor suprafeței pe planele de coordonate.

b) Acțiunea fluidelor grele în repaus pe suprafețe curbe deschise

Considerăm o curbă deschisă ABCD pe care o proiectăm pe planele triedrului triortogonal Oxyz, figura 14.

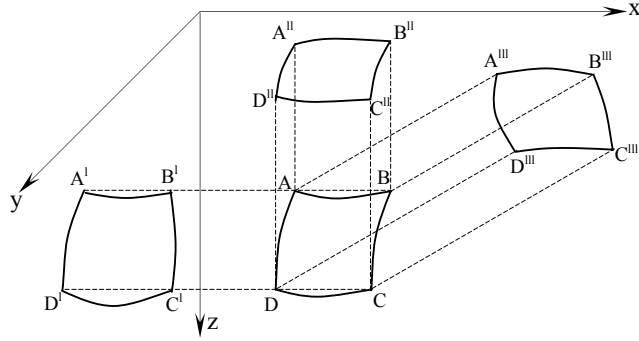


Fig. 14 Acțiunea unui fluid asupra unei suprafețe curbe deschise

Presiunea fluidului la înălțimea z este $p = \gamma \cdot z$, în acest caz rezultând:

$$\begin{cases} F_{p_x} = -\gamma \int_{S_{yoz}} z \, dS_{yoz} = -\gamma \cdot z_G^I S_{yoz} \\ F_{p_y} = -\gamma \int_{S_{zox}} z \, dS_{zox} = -\gamma \cdot z_G^{II} S_{zox} \\ F_{p_z} = -\gamma \int_{S_{xoy}} z \, dS_{xoy} = -\gamma \cdot z_G^{III} S_{xoy} = -\gamma \cdot V \end{cases} \quad (2.46)$$

respectiv:

$$\begin{aligned} \bar{r}_{C^I} &= \frac{\int \bar{r} z \, dS_{yoz}}{z_G^I S_{yoz}}; & \bar{r}_{C^{II}} &= \frac{\int \bar{r} z \, dS_{zox}}{z_G^{II} S_{zox}} \\ \bar{r}_{C^{III}} &= \frac{\int \bar{r} z \, dS_{xoy}}{z_G^{III} S_{xoy}} = \frac{\int \bar{r} \, dV}{V} = \bar{r}_G(V) \end{aligned} \quad (2.47)$$

În concluzie, efectul este un torsor înlocuit nu un sistem de trei forțe în general neconcurente și paralele cu axele de coordonate.

Forțele orizontale se determină analog cu cele exercitate de un lichid pe pereți plani, unde se înlocuiește suprafața cu proiecția suprafeței curbe.

Forța verticală este egală cu greutatea lichidului cuprins între suprafața peretelui curb și planul xOy și trece prin centrul de greutate al acestui volum.

2.7. Acțiunea fluidelor în repaus pe suprafețe curbe închise

Știm că proiecția unei suprafețe curbe închise pe un plan este nulă. Considerăm planul P cu normala sa N și o suprafață curbă închisă S , figura 15.

Proiecția suprafeței elementare dS pe un plan este: $dS_p = dS(\bar{n}, \bar{N})$

Proiecția totală este:

$$S_p = \int_S \bar{N} \cdot \bar{n} \, dS = \int_V \text{div} \bar{N} \, dV = 0 \quad (2.48)$$

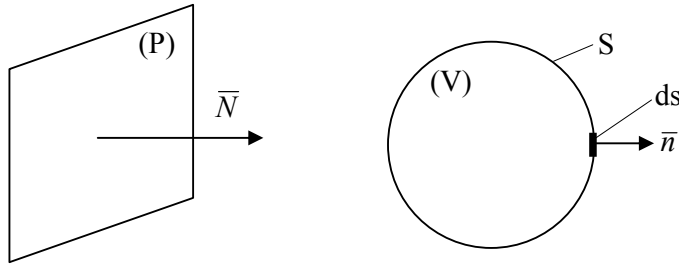


Fig. 15 Proiecția unei curbe închise pe un plan

unde s-a aplicat formula lui Gauss de transformare a integralei de suprafață în integrală de volum, ($\text{div} \bar{N} = 0$).

a) Acțiunea fluidelor ușoare în repaus pe suprafețe curbe închise

Ținând cont că $S_{yoz} = S_{zox} = S_{xoy} = 0$, rezultă că:

$$F_{p_x} = F_{p_y} = F_{p_z} = 0 \quad (2.49)$$

Acțiunea fluidului nu este totuși nulă, el dezvoltând tensiuni unitare în peretele solid al rezervoarelor. Acest calcul este necesar pentru dimensionarea rezervoarelor.

b) Acțiunea fluidelor grele în repaus pe suprafețe curbe închise

Considerăm o suprafață curbă închisă aflată în fluid și un sistem de referință cu planul xOy situat pe suprafața liberă, figura 16.

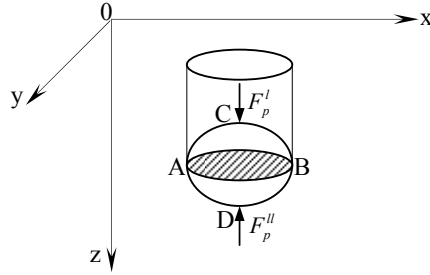


Fig. 16 Acțiunea fluidelor grele asupra suprafețelor curbe închise

Ținând cont de faptul că proiecțiile suprafeței curbe sunt nule, rezultă:

$$F_{p_x} = F_{p_y} = 0$$

Pentru determinarea forței F_{p_z} , considerăm suprafața dată secționată de un plan paralel cu xOy și formată astfel din două suprafețe deschise ACB și BDA. Forța de presiune pe porțiunea superioară este îndreptată în jos F_p^I , respectiv pe porțiunea inferioară în sus, F_p^{II} .

$$F_{p_z} = F_p^I - F_p^{II} = \gamma \cdot V_{ACB}^{cil} - \gamma \cdot V_{ADB}^{cil} = -\gamma \cdot V; \quad \bar{F}_{p_z} = -\gamma \cdot V \cdot \bar{k} \quad (2.50)$$

Această forță trece prin centrul de greutate al volumului V.

Un corp scufundat într-un lichid este supus unei forțe verticale portante egală cu greutatea volumului de lichid dezlocuit de corp și trece prin centrul de greutate al volumului conform principiului lui Arhimede.

Trebuie făcută remarcă că această forță este o forță de suprafață (de presiune) și este exprimată prin produsul dintre γ_{lichid} și volum; nu este o forță masică.

Principiul lui Arhimede este valabil și pentru gaze, dar datorită greutății specifice mici a gazelor este sesizată doar la corpuri solide cu greutate specifice mici cum ar fi dirijabilele.

Forța portantă poate fi determinată și direct integrând forțele de presiune pe suprafața închisă S:

$$\vec{F}_p = - \int_S p \vec{n} dS = - \int_V \text{grad} p dV \quad (2.51)$$

Știm că: $p = \gamma z + p_o$ deci: $\text{grad} p = \gamma \cdot \vec{k}$
 rezultă: $\vec{F}_p = -\gamma \cdot \vec{k} \int_V dV = -\gamma \cdot V \cdot \vec{k} \quad (2.52)$

Principiul lui Arhimede rămâne valabil și pentru corpuri parțial scufundate în fluid, figura 16.

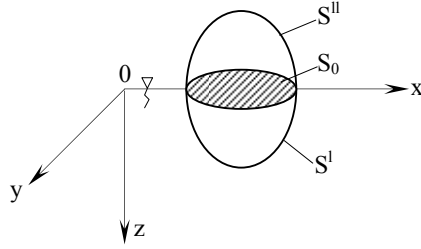


Fig. 16 Corp parțial scufundat în lichid

Suprafața este închisă $S = S^I + S^{II}$, S_o fiind aria delimitată de corp din suprafața liberă a lichidului. Pe cele două suprafețe S^I și S^{II} acționează presiunile $p = p_o + \gamma \cdot z$, respectiv p_o .

$$F_p = - \int_{S^I} \vec{n} (p_o + \gamma z) dS - \int_{S^{II}} \vec{n} p_o dS = - \int_S \vec{n} p_o dS - \gamma \int_{S^I} z \cdot \vec{n} dS \quad (2.53)$$

Integrala $\int_S \vec{n} p_o dS$ este nulă. Pe suprafața liberă a lichidului $z = 0$, deci și pe S_o . Putem

aduna la F_p termenul $\int_{S_o} z \cdot \vec{n} dS$, obținând:

$$F_p = -\gamma \int_{S^I + S_o} z \cdot \vec{n} dS = -\gamma \int_{V_o} \text{grad} z dV = -\gamma \cdot V_o \cdot \vec{k} \quad (2.54)$$

unde V_o este volumul de lichid dezlocuit de corp numit și volum de carenă.

Principiul lui Arhimede poate fi stabilit și pentru un corp scufundat în două lichide imiscibile, figura 17, cu greutate specifice $\gamma_1 < \gamma_2$, în repaus.

Presiunea în lichidul cu γ_1 , pentru $z < h$ este:

$$p_1(z) = p_o + \gamma_1 \cdot z \quad (2.55)$$

Presiunea în lichidul cu γ_2 , pentru $z > h$ este:

$$p_2(z) = p_o + \gamma_1 h + \gamma_2 (z - h) \quad (2.56)$$

Pentru suprafața de separație ($z = h$), cele două presiuni sunt egale:

$$p_1(h) = p_2(h).$$

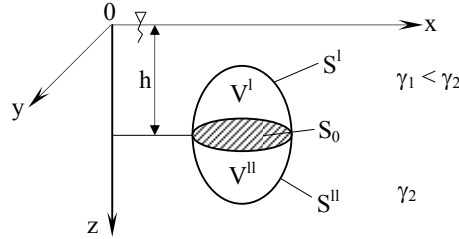


Fig. 17. Acțiunea fluidelor grele asupra suprafețelor curbe închise

Rezultanta forțelor de presiune ce acționează asupra corpului este:

$$\begin{aligned}\bar{F}_p = & -\int_{S^I} \bar{n} \cdot p_1 dS - \int_{S^{II}} \bar{n} \cdot p_2 dS = -p_o \int_{S^I} \bar{n} dS - \gamma_1 \int_{S^I} \bar{n} \cdot z dS - p_o \int_{S^{II}} \bar{n} dS - \\ & - \int_{S^{II}} \bar{n} [\gamma_1 h - \gamma_2 (z - h)] dS\end{aligned}$$

adunăm și scădem forța: $\gamma_1 h S_o$.

$$\text{Rezultă: } \bar{F}_p = -\gamma_1 \int_{S^I + S_o} \bar{n} \cdot z dS - \int_{S^{II} + S_o} \bar{n} [\gamma_1 h - \gamma_2 (z - h)] dS \quad (2.57)$$

Deci forța portantă este suma forțelor portante parțiale și are modulul egal cu suma greutateilor volumelor de lichid dezlocuite.

Dacă volumele V^I și V^{II} au centrele de greutate G^I și G^{II} , forța portantă trece printr-un punct G situat pe dreapta $G^I G^{II}$, între segmente fiind stabilită relația:

$$\frac{G^I G}{G^{II} G} = \frac{F_{pz}}{F_{p1}} = \frac{\gamma_2 V_2}{\gamma_1 V_1} \quad (2.58)$$

Rezultatul se poate extinde pentru mai multe lichide imiscibile.

2.8. Plutirea corpurilor

Asupra unui corp cufundat într-un lichid acționează forța de greutate:

$$F_g = \gamma_m V$$

unde γ_m este greutatea specifică a corpului și forța portantă $\gamma \cdot V_c$, unde γ este greutatea specifică a lichidului și V_c volumul de carenă (volumul de lichid dezlocuit).

Dacă $\gamma_m > \gamma$, corpul se scufundă, deoarece $F_g > F_p$. Dacă $\gamma_m = \gamma$ corpul rămâne în echilibru indiferent, ceea ce corespunde plutirii scufundate (plutire submarină). Cazul cel mai important este acela când $\gamma_m < \gamma$, deci $F_g < F_p$, când corpul plutește la suprafața lichidului și creează un volum de carenă, $V_c = V$.

$$\text{Rezultă: } \gamma_m V = \gamma V_c \quad (2.59)$$

Un astfel de corp liber scufundat parțial în lichid se numește plutitor.

Dacă un vas are anumite încărcări, acestora le corespunde mai multe carene (porțiunea din corp care este scufundată și creează volumul de carenă) cuprinse între

carena minimă pentru vasul gol și carena maximă corespunzătoare vasului încărcat la limită.

Centrul de greutate C al volumului de carenă, în care se aplică forța portantă se numește *centru de carenă*. Pentru diferite înclinări ale plutitorului, la această greutate F_g , carenele au același volum, conform condiției de echilibru, formele lor fiind în general diferite (cu excepția plutitorului omogen sferic) însă poziția centrului de carenă se schimbă.

Cele două forțe care echilibrează un plutitor în poziția normală de plutire au același suport. În cazul unei înclinări provocate de perturbații exterioare poziția centrului de carenă se modifică, din C se mută în C^l , figura 18.a.

Cele două forțe nu au același suport și formează un cuplu de forțe, care tinde să readucă plutitorul în poziția normală, deci plutirea este stabilă. În aplicațiile plutirii corpurilor se pune în general problema căutării condițiilor necesare pentru o plutire stabilă în cazul unor perturbații care nu depășesc anumite limite.

Definim *planul de plutire* planul suprafeței libere a lichidului, iar *linia de plutire* curba de intersecție a plutitorului cu planul de plutire. Aria figurii plane mărginită de linia de plutire se numește *arie de plutire*.

Raportăm plutitorul la un sistem de axe astfel încât planul xOy să conțină centrul de greutate G și centrul de carenă C , corespunzător poziției normale de plutire, axa Oz unind punctele C și G . Axa Oz este axă de plutire și este solidară cu plutitorul.

Axa Oy este de obicei axă longitudinală a plutitorului și se numește axă de înclinație. Adâncimea maximă a plutitorului sub linia de plutire se numește *pescaj* (h), figura 18. b.

Vericala forței portante care trece prin centrul de carenă corespunzător punctului înclinat C^l , intersectează axa de plutire în punctul M , numit și *metacentru*.

Când plutitorul tinde să revină în poziția verticală, metacentrul tinde către un metacentru principal M_0 . Poziția metacentrului față de centrul de greutate al plutitorului depinde de echilibrul plutirii.

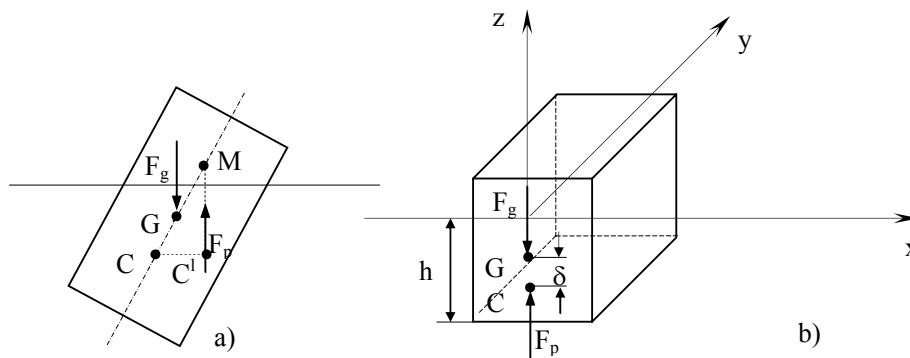


Fig. 18 Plutirea corpurilor
a. plutitor înclinat; b. plutitor în poziția de echilibru

Echilibrul este stabil atunci când metacentrul se află deasupra centrului de greutate, $GM > 0$.

Echilibrul este instabil atunci când metacentrul se află sub centrul de greutate, $GM < 0$.

Echilibrul este indiferent atunci când M coincide cu G, $GM = 0$.

Distanța dintre punctul metacentric M și centrul de carenă, pentru poziția verticală al plutitorului poate fi determinată conform teoremei metacentrului cu relația:

$$C_M = \frac{I_y^g}{V_c} \quad (2.60)$$

unde I_y^g este momentul de inerție al ariei de plutire calculat față de axa de înclinație Oy, care trece prin centrul de greutate al ariei de plutire.

Condiția de stabilitate a plutirii, poate fi scrisă și altfel:

$$GM > 0 \text{ sau } CM - CG > 0 \text{ sau } \frac{I_y^g}{V_c} - CG > 0 \quad (2.61)$$

3. CINEMATICA FLUIDELOR

3.1. Noțiuni specifice

Cinematica studiază mișcarea fluidelor fără să considere forțele care acționează asupra lor determinând mișcarea, efectuând un studiu geometric al acesteia. De aceea, studiile cinematiei fluidelor sunt valabile atât pentru fluide ideale cât și pentru cele reale.

Cinematica fluidelor are la bază ipoteza continuității, caracterizată de parametrii care sunt funcții de timp și de punct, continue și derivabile. Ca metodă de lucru, considerăm că masa de fluid este formată dintr-un număr foarte mare de particule fluide, analoage punctelor materiale din mecanica solidului.

Studiul cinematic al mecanicii fluidelor constă în determinarea traiectoriilor, vitezelor și accelerațiilor particulelor de fluid. Se pot utiliza două metode.

Prima metodă care poartă denumirea *Lagrange*, studiază mișcarea fiecărei particule de fluid în raport cu un sistem fix $Oxyz$, poziția unei particule depinzând de timp și de coordonatele poziției inițiale x_0, y_0, z_0 , corespunzătoare timpului inițial t_0 :

$$x = x(x_0, y_0, z_0, t); \quad y = y(x_0, y_0, z_0, t); \quad z = z(x_0, y_0, z_0, t) \quad (3.1)$$

Componentele vitezei și accelerației se determină cu relațiile:

$$u = \frac{\partial x}{\partial t}; \quad v = \frac{\partial y}{\partial t}; \quad w = \frac{\partial z}{\partial t} \quad (3.2)$$

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}; \quad a_y = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}; \quad a_z = \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \quad (3.3)$$

Această metodă este mai rar întâlnită și este necesară când se studiază mișcarea unei particule individualizate.

A doua metodă, metoda *Euler*, studiază câmpul vitezelor în punctele spațiului ocupat de fluidul în mișcare și variația acelor viteze în funcție de timp. Câmpul vitezelor este dat de relațiile:

$$u = u(x, y, z, t); \quad v = v(x, y, z, t); \quad w = w(x, y, z, t) \quad (3.4)$$

sau $\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}, t)$, unde x, y, z reprezintă coordonatele punctelor spațiului și nu ale particulei fluide ca în cazul metodei precedente. Metoda Euler este mai simplă și utilizează teoria câmpurilor ca aparat matematic de studiu.

Componentele vitezelor se determină prin derivarea totală a funcțiilor $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$:

$$u = \frac{dx}{dt}; \quad v = \frac{dy}{dt}; \quad w = \frac{dz}{dt} \quad (3.5)$$

Traectoria particulelor se obține din integrarea ecuațiilor precedente:

$$x = x(x_0, y_0, z_0, t); \quad y = y(x_0, y_0, z_0, t); \quad z = z(x_0, y_0, z_0, t) \quad (3.6)$$

unde x_0, y_0, z_0 sunt constantele de integrare și reprezintă coordonatele particulei la momentul inițial t_0 .

Pentru determinarea câmpului accelerațiilor derivăm pe u, v, w , ținând cont că sunt funcții de x, y, z și de t , utilizând regula de diferențiere totală:

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

Pentru componentele accelerației obținem următoarele expresii:

$$\begin{cases} a_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ a_y = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ a_z = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad (3.7)$$

Înmulțind relațiile cu \bar{i} , respectiv cu \bar{j} și \bar{k} versorii axelor de coordonate și adunând, obținem:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V} \cdot \nabla) \cdot \bar{V} \quad (3.8)$$

deci accelerația este derivata totală a vitezei. Se observă că această derivată totală este formată din accelerația locală $\frac{\partial \bar{V}}{\partial t}$ și accelerația convectivă (de antrenare):

$$u \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + w \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} \quad \text{sau :} \quad (\bar{V} \cdot \nabla) \cdot \bar{V}.$$

Accelerația locală reprezintă variația vitezei în puncte fixe în spațiu și este caracteristică mișcărilor nepermanente (coordonatele punctelor sunt considerate ca invariabile). În mișcarea permanentă accelerația locală este nulă.

Câmpul accelerațiilor se poate exprima în coordonate carteziene și sub altă formă echivalentă:

$$\begin{cases} a_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) + w \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - v \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ a_y = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) + u \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - w \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ a_z = \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) + v \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - u \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (3.9)$$

iar forma vectorială este:

$$\bar{a} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \text{grad} \frac{V^2}{2} + \text{rot} \bar{V} \times \bar{V} \quad (3.10)$$

Expresia vectorială pune în evidență partea potențială, $\text{grad} \frac{\bar{V}^2}{2}$ și partea rotațională, $\text{rot} \bar{V} \times \bar{V}$ a accelerației consecutive.

Cinematica fluidelor operează cu noțiuni specifice mișcării fluidelor.

Curentul de fluid este o masă de fluid în mișcare.

Linia de curent este linia curbă care urmărind direcția de curgere este tangentă la vectorii viteză ai particulelor care la un moment dat coincid cu punctele de pe curba respectivă, figura 19. În general linia de curent nu este identică cu traiectoria.

În cazul mișcărilor nepermanente liniile de curent își modifică forma în timp, iar în cazul mișcărilor permanente, când vectorii de viteză au poziții fixe în fiecare punct din spațiu, liniile de curent coincid cu traiectoriile și rămân aceleași în orice moment. În

general, liniile de curent nu se intersectează (o particulă nu poate avea două viteze diferite) decât în cazul unor puncte critice.

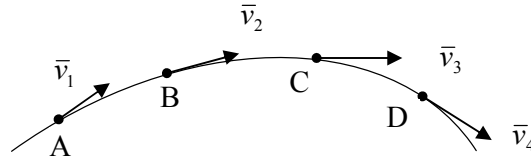


Fig. 19 Linie de curent

Ecuatiile diferențiale ale liniilor de curent se obțin din condiția ca vectorul $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ să fie paralel cu vectorul viteză, adică:

$$\vec{V} \times d\vec{r} = 0 \quad \text{sau :} \quad \frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (3.11)$$

În cazul mișcărilor permanente vizualizarea traiectoriilor se poate realiza prin introducerea de suspensii fine în fluid.

Tubul de curent este suprafața tubulară formată de liniile de curent, care trec la un moment date prin toate punctele unei curbe închise. În mișcarea permanentă, tubul de curent își păstrează în timp forma și dimensiunile.

Firul de curent este fluidul din interiorul unui tub de curent elementar (cu secțiune transversală foarte mică), care materializează o linie de curent.

Secțiunea transversală a unui tub de curent (secțiunea vie) este suprafața normală pe toate liniile de curent care o străbat limitată de tub.

Perimetrul ud este lungimea conturului secțiunii transversale a unui tub de curent, mărginită de pereți rigizi.

Raza hidraulică este raportul dintre aria secțiunii transversale și perimetrul ud:

$$R = \frac{A}{P} \quad (3.12)$$

Debitul unui curent de fluid printr-o suprafață S este fluxul vectorului viteză \vec{V} , prin această suprafață, și reprezintă limita raportului dintre volumul ΔV care trece prin suprafața S într-un interval de timp Δt , când aceasta tinde la 0, figura 20.

$$Q = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \int_S \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS = \int_S V_n \, dS \quad (3.13)$$

Debitul se poate defini și ca volumul de fluid care trece printr-o suprafață în unitatea de timp.

În afara acestui debit numit și debit volumic, se mai definesc debitul masic $Q_m = \rho \cdot Q$ și debitul gravific $Q_g = \gamma \cdot Q$.

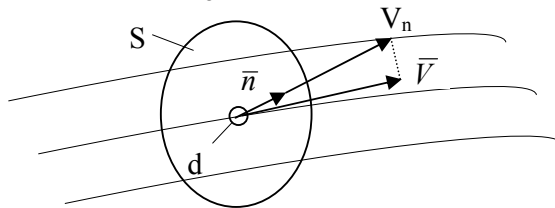


Fig. 20 Suprafața S față de care calculăm debitul

Circulația vitezei \vec{V} de-a lungul unei curbe oarecare este:

$$\Gamma_{AB} = \int_{AB} \vec{V} \cdot d\vec{s} = \int_{AB} V_t \, dS \quad (3.14)$$

În cazul în care curba este închisă C , atunci circulația vitezei poate fi exprimată cu ajutorul unei integrale de suprafață, S fiind o suprafață oarecare care se sprijină pe curba C , (teorema lui Stokes):

$$\Gamma = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s} = \iint_S \text{rot} \vec{V} \cdot \vec{n} \, dS \quad (3.15)$$

Vârtejul unei particule de fluid este vectorul definit prin relația:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{V} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} \quad (3.16)$$

și reprezintă viteza unghiulară medie de rotație a particulei în jurul unei axe ce trece prin centrul ei de greutate. Componentele sale sunt:

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right); \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right); \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.17)$$

Linia și tubul de vârtaj sunt noțiuni analoge cu cele definite anterior, în care se înlocuiește vectorul \vec{V} cu $\vec{\omega}$.

Tipuri de mișcări specifice fluidelor

Mișcările fluidelor se pot clasifica după diferite criterii. Din acestea menționăm:

- după modul de variație în timp a parametrilor mișcării, pot fi permanente (viteza, presiunea, densitatea sunt constante în timp) și nepermanente, când parametrii sunt în funcție de timp;
- după modul de desfășurare a mișcării în lungul curenților se deosebesc mișcări uniforme (liniile de curent sunt paralele și rectilinii) și neuniforme, când liniile de curent au o formă oarecare, de-a lungul cărora vitezele variază ca mărime și direcție;
- după câmpul vitezelor se deosebesc mișcări potențiale, când există o funcție ϕ , numită funcție de potențial, astfel încât $\vec{V} = \text{grad} \phi$ (aceste mișcări se mai numesc și mișcări irotaționale $\text{rot} \vec{V} = \text{rot} \cdot \text{grad} \phi = 0$) și mișcări nepotențiale sau rotaționale;
- după structura fizică a curgerii unui fluid real sunt mișcări laminare care se produc la viteze relativ mici și în care straturile se mișcă paralel unele cu altele și mișcări turbulente la care particulele diferitelor straturi se amestecă între ele și se deplasează după traiectorii neregulate.

3.2. Mișcarea unei particule fluide

Mișcarea unui fluid este mult mai complicată decât mișcarea unui rigid solid (care poate fi descompusă într-o mișcare de translație și o rotație în jurul unei axe instantanee de rotație) deoarece fiecare particulă de fluid suferă o translație, o rotație și o deformare.

Considerăm o particulă de fluid, figura 21.

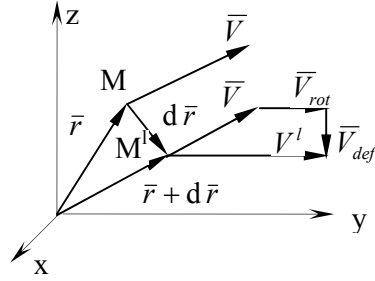


Fig. 21 Deplasarea unei particule fluide

În punctul M (x,y,z) viteza are componentele u, v și w, iar într-un punct învecinat M' (x+dx,y+dy,z+dz) viteza V' are componentele:

$$\begin{cases} u' = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ v' = v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ w' = w + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{cases} \quad (3.18)$$

Dacă adunăm și scădem la prima ecuație termenii $\frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial x} dy$ și $\frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} dz$, putem s-o scriem sub forma:

$$\begin{aligned} u' = u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz + \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) dz - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy \end{aligned} \quad (3.19)$$

În mod analog se obțin relațiile pentru v' și w'.

Se observă că ultimele două paranteze sunt componentele vitezei unghiulare de rotație, deci ele reprezintă rotația particulei. Se notează:

$$\begin{cases} a_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = a_{yx} \\ a_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = a_{xz} \\ a_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \end{cases} \quad (3.20)$$

unde $a_{xy} = a_{yx}$, $a_{zx} = a_{xz}$, reprezintă viteze specifice de deformare unghiulară iar a_{xx} și analog a_{yy} , a_{zz} reprezintă viteze specifice de deformare liniară.

Cu aceste notații ecuația (3.19) devine:

$$u' = u + a_{xx} dx + a_{xy} dy + a_{xz} dz + \varpi_y dz - \varpi_z dy$$

componentele v' și w' se determină în mod analog.

Pentru determinarea semnificației lui a_{xx} se consideră un element de fluid liniar AA', paralel cu Ox, de lungime dx, fig. 22.

Diferența deplasărilor relative ale capătului elementului liniar în intervalul de timp dt reprezintă dilatarea sau contractarea acestuia și este:

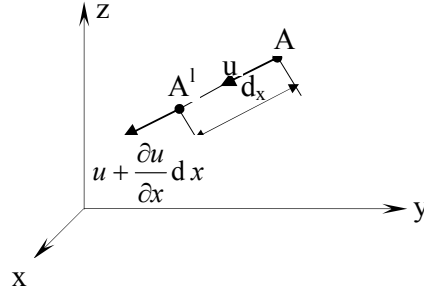


Fig. 22 Deformarea liniară a unei particule fluide

$$\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) dt - u dt = \frac{\partial u}{\partial x} dx dt \quad (3.21)$$

deci, viteza specifică de deformare liniară este:

$$a_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{dx dt} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} dx dt \quad (3.22)$$

Pentru interpretarea termenilor de forma a_{yz} , a_{zy} se examinează mișcarea unei particule de formă paralelipipedică, a cărei secțiune cu un plan paralel cu yOz este dreptunghiul ABCD, figura 23.

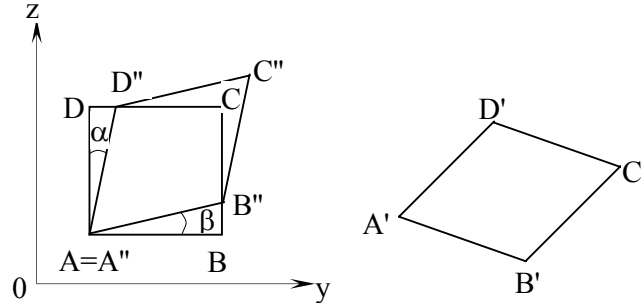


Fig. 23 Deformația unghiulară a unei particule fluide

Într-un interval de timp dt , particula se deplasează și se deformează ocupând poziția $A'B'C'D'$. Dacă anulăm translația și rotația, aducem particula în poziția $A''B''C''D''$. Deplasarea relativă DD'' se datorează diferenței dintre vitezele punctelor A și D, $v_D - v_A = \frac{\partial v}{\partial z} dz$ și are mărimea: $DD'' = \frac{\partial v}{\partial z} dz dt$. Analog rezultă:

$$BB'' = \frac{\partial w}{\partial y} dy dt.$$

În ipoteza unor deplasări mici, deformația medie a unghiului drept BAD este:

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \left(\frac{DD''}{AD} + \frac{BB''}{AB} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) dt \quad (3.23)$$

Deci viteza de deformare unghiulară are expresia:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\alpha + \beta}{dt} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = a_{yz} \quad (3.24)$$

Rezultă că a_{xx} , a_{yy} , a_{zz} reprezintă vitezele de deformare liniară, iar mărimile a_{xy} , a_{xz} , a_{yz} reprezintă viteze specifice de deformare unghiulară. Revenind la expresiile vitezelor u' , v' , w' , putem determina vectorul viteze \bar{V} înmulțind respectiv cu \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} și adunând. Dacă considerăm funcția scalară:

$$\phi = \frac{1}{2} (a_{xx} dx^2 + a_{yy} dy^2 + a_{zz} dz^2 + 2a_{xy} dx dy + 2a_{xz} dx dz + 2a_{yz} dy dz) \quad (3.25)$$

vectorul \bar{V}' este: $\bar{V}' = \bar{V} + \bar{\omega} \times d\bar{r} + \text{grad}\phi$ cu precizarea că gradientul funcției ϕ se calculează în raport cu dx , dy , dz .

Funcția ϕ se mai numește *funcție de deformare*, iar cuadrica corespunzătoare este un elipsoid de deformare. Utilizând relația vectorială anterioară, putem formula următoarea teoremă: dacă se cunoaște mișcarea particulei fluide $M(\bar{r})$, mișcarea unei particule vecine $M^1(\bar{r} + d\bar{r})$ se compune dintr-o mișcare de translație definită de viteza

$$\bar{V} \text{ a punctului } M, \text{ dintr-o mișcare de rotație definită de viteza unghiulară } \bar{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot}\bar{V}$$

în jurul unei axe care trece prin M și dintr-o mișcare de deformare a quadricii $\phi = \text{ct.}$ cu centrul în M și care trece prin M^1 , mișcare compusă dintr-o deformare liniară definită de mărimile a_{xx} , a_{yy} , a_{zz} și deformare unghiulară definită de mărimile a_{xy} , a_{xz} , a_{yz} , figura 21.

Această teoremă poartă numele de teorema lui *Cauchy-Helmholtz*.

3.3. Ecuația continuității

Această ecuație este expresia matematică a principiului conservării masei de fluid în mișcare.

Se consideră cazul general al unui fluid compresibil cu $\rho(x,y,z,t)$ în mișcare nepermanentă cu $\bar{V}(x,y,z,t)$. Alegem un volum de fluid de forma unui paralelipiped cu muchiile dx , dy , dz , figura 24. Relația care exprimă continuitatea fluidului se obține egalând variația masei de fluid din volumul considerat cu diferența dintre masa care intră în acest volum și masa de fluid care iese din el, în același interval de timp.

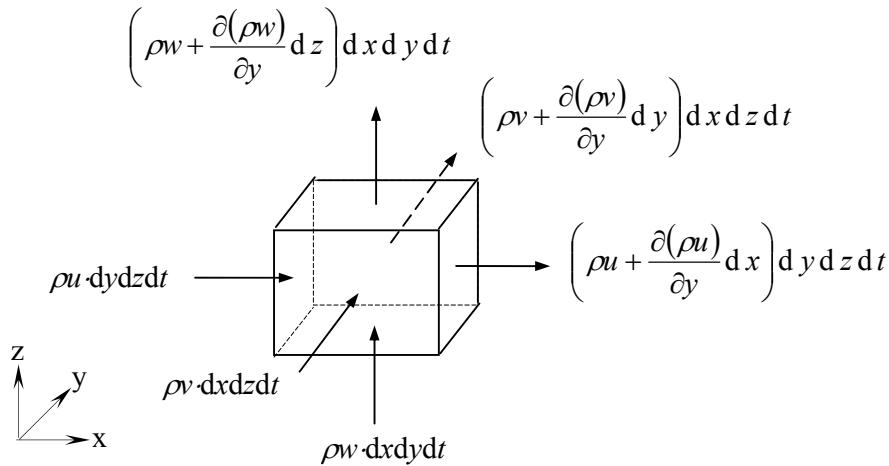


Fig. 24 Particulă fluidă paralelipedică

La timpul t masa de fluid este $\rho \cdot dx dy dz$, iar la timpul $t + dt$ devine $\left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt\right) dx dy dz$. Variația masei este: $dm = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt$

Diferența dintre masa de fluid intrată și cea ieșită în intervalul de timp dt , considerând cele trei direcții este:

$$dm = -\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right) dx dy dz dt \quad (3.26)$$

Din egalarea celor două expresii rezultă:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \text{ sau } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (3.27)$$

Dacă efectuăm derivatele produselor ρu , ρv , ρw , obținem altă formă a ecuației continuității:

$$\frac{dp}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \text{ sau } \frac{dp}{dt} + \rho \cdot \operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (3.28)$$

În cazul mișcării permanente a unui fluid compresibil $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, deci se obține:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \text{ sau } \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (3.29)$$

Pentru un fluid incompresibil, $\rho = \text{const.}$ în mișcare permanentă sau nepermanentă, ecuația continuității are expresia:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \text{ sau } \operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (3.30)$$

adică câmpul vitezei unui fluid incompresibil este solenoidal.

Ecuația continuității pentru un tub de curent oarecare

Considerăm un volum de fluid $V(t)$ în interiorul unui tub de curent limitat de două secțiuni S_1 și S_2 , respectiv la intrare și la ieșire. Masa din interiorul tubului este:

$m = \int_V \rho dV$. În intervalul de timp dt densitatea fluidului crește cu $\frac{\partial \rho}{\partial t} dt$, iar masa de

fluid crește cu $dm = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV dt$. Această creștere a masei se datorează faptului că prin

suprafața de intrare S_1 pătrunde în intervalul de timp dt o masă de fluid mai mare decât cea care iese din același interval de timp prin suprafața de ieșire S_2 , diferența fiind:

$$dm = \left(\int_{S_1} \rho_1 V_{n_1} dS_1 - \int_{S_2} \rho_2 V_{n_2} dS_2 \right) dt$$

Egalând cele două expresii ale variației masei rezultă:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int_{S_1} \rho_1 V_{n_1} dS_1 - \int_{S_2} \rho_2 V_{n_2} dS_2 = Q_{m_1} - Q_{m_2} \quad (3.31)$$

Ecuația (3.31) se interpretează astfel: variația masei de fluid dintr-un tub de curent în unitatea de timp este egală cu diferența dintre debitul masic intrat în tubul de curent și debitul masic ieșit din tub.

În mișcarea permanentă, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ și rezultă că:

$$\int_{S_1} \rho_1 V_{n_1} dS_1 = \int_{S_2} \rho_2 V_{n_2} dS_2 = Q_M \quad (3.32)$$

deci în mișcarea permanentă a unui fluid compresibil debitul masic prin orice secțiune este constant. Dacă fluidul este incompresibil indiferent de felul mișcării debitul volumic este constant.

Considerăm un tub de fluid elementar limitat de două secțiuni transversale situate la o distanță infinit mică ds . Într-un interval de timp dt prin secțiunea 1 intră masa $\rho \cdot V \cdot S \cdot dt$, iar prin secțiunea 2 iese masa $\left[\rho V S + \frac{\partial}{\partial s}(\rho V S) ds \right] dt$, figura 25.

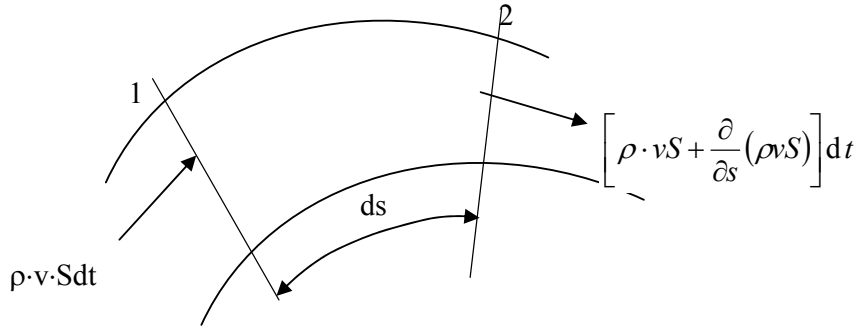


Fig. 25 Tub de fluid

Variația masei de fluid în intervalul de timp dt este dată de diferența dintre cele două mase, $dm = -\frac{\partial}{\partial s}(\rho V S) ds dt$.

Pe de altă parte masa inițială $\rho \cdot dV = \rho \cdot S \cdot ds$ suferă în timpul dt variația $dm = \frac{\partial(\rho S dx)}{\partial t} dt = \frac{\partial(\rho S)}{\partial t} ds dt$

Egalând cele două expresii diferite ale variației masei, rezultă:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho S) + \frac{\partial}{\partial s}(\rho V S) = 0 \quad (3.33)$$

care reprezintă ecuația continuității pentru un fluid compresibil în mișcare nepermanentă. Dacă fluidul este compresibil și mișcarea este nepermanentă într-un tub de curent cu pereți solizi, atunci $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$ și ecuația devine:

$$S \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}(\rho V S) = 0 \quad (3.34)$$

Dacă secțiunea este constantă în lungul tubului, $\frac{\partial S}{\partial s} = 0$ și rezultă:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}(\rho V) = 0 \quad (3.35)$$

Pentru un fluid compresibil în mișcare permanentă ecuația ia forma:

$$\rho V S = Q_M = \text{const} \quad (3.36)$$

adică debitul masic este constant în lungul tubului. Dacă fluidul este incompresibil ecuația continuității se scrie sub forma:

$$\rho S = Q = \text{const} \quad (3.37)$$

deci debitul volumic este constant în lungul tubului de curent.

4. DINAMICA FLUIDELOR IDEALE

4.1. Ecuațiile lui Euler

Dinamica fluidelor studiază mișcarea fluidelor și interacțiunea lor cu corpurile rigide, ținând seama de forțele care intervin și de transformările energetice produse în timpul mișcării. În dinamica fluidelor se aplică principiile generale ale mecanicii generale, legi de variație și legi de conservare.

În studiul mecanicii fluidelor ideale, ipoteza de fluid perfect (fără viscozitate) reprezintă o primă aproximație, rezultatele obținute putând fi folosite cu ajutorul unor coeficienți de corecție și pentru probleme reale. Ca metodă de lucru se pot extrapola principiile și teoremele mecanicii rigidului solid la dinamica mediului fluid continuu. Pentru aceasta considerăm mediul fluid ca fiind format dintr-o infinitate de particule infinit mici a căror mișcare se supune legii mecanicii clasice, fiind suficient să determinăm ecuațiile de mișcare pentru o particulă oarecare din mediul fluid. Ca formă a particulei fluide alegem forma paralelipipedică, forma adoptată pentru particulă neavând influență asupra rezultatelor obținute.

Considerăm o particulă infinit mică de formă paralelipipedică detașată de mediul de fluid, figura 26.

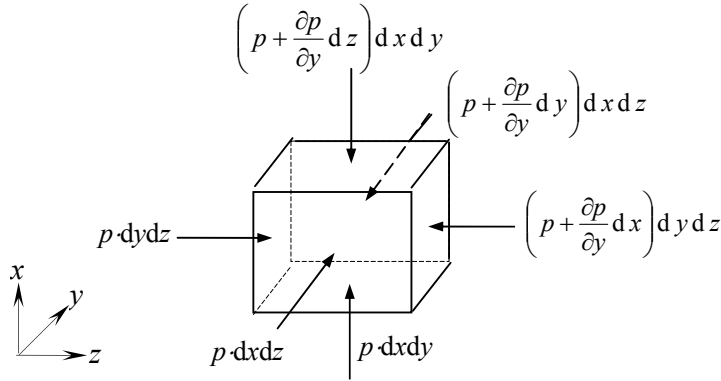


Fig. 26. Particulă de fluid paralelipipedică sub acțiunea forțelor de suprafață

Particula elementară de masă dm se află în echilibru dinamic sub acțiunea forței de inerție și a forțelor exterioare, deci putem scrie:

$$dm \cdot \vec{a} = d\vec{F}_m + d\vec{F}_s \quad (4.1)$$

Forțele masice sunt aceleași ca și în statica fluidelor, deci forța masică este:

$$d\vec{F}_m = \vec{f}_m \cdot dm \quad (4.2)$$

unde \vec{f}_m este forța masică unitară $\vec{f}_m(X, Y, Z)$. Componentele masice sunt:

$$\begin{cases} dF_{m_x} = X\rho dx dy dz \\ dF_{m_y} = Y\rho dx dy dz \\ dF_{m_z} = Z\rho dx dy dz \end{cases} \quad (4.3)$$

Forțele de suprafață se pot calcula pe fiecare față a particulei prin produsul dintre valoarea presiunii (considerată constantă pe fiecare față a particulei) și mărimea suprafeței pe care acționează.

Componentele după direcțiile Ox, Oy, Oz ale rezultantei forțelor de presiune dF_p sunt:

$$\begin{cases} dF_{p_x} = p \, dy \, dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy \, dz = -\frac{\partial p}{\partial x} dx \, dy \, dz \\ dF_{p_y} = -\frac{\partial p}{\partial y} dx \, dy \, dz \\ dF_{p_z} = -\frac{\partial p}{\partial z} dx \, dy \, dz \end{cases} \quad (4.4)$$

Ecuția de mișcare după direcția Ox este:

$$\frac{du}{dt} \rho \, dx \, dy \, dz = X \rho \, dx \, dy \, dz - \frac{\partial p}{\partial x} dx \, dy \, dz \quad (4.5)$$

Analog se obțin ecuațiile după direcțiile Oy și Oz.

Se împart aceste ecuații la masa particulei $dm = \rho \, dx \, dy \, dz \neq 0$ și ținând cont de derivatele substanțiale ale vitezelor, obținem:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases} \quad (4.6)$$

Forță unitară locală de inerție
Forță unitară convectivă de inerție
Forță unitară masică
Forță unitară de presiune

Ecuțiile (4.6) reprezintă ecuațiile lui Euler pentru dinamica fluidelor ideale.

Necunoscutele sistemului de ecuații sunt în număr de patru u, v, w și p . Pentru a putea fi integrat adăugăm ecuația continuității, care pentru $\rho = \text{const.}$ este:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.7)$$

Rezultă că sistemul ecuațiilor de mișcare este un sistem de patru ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi cu patru necunoscute.

Integrarea sistemului conduce la aflarea unor funcții a căror determinare poate fi făcută cu ajutorul condițiilor la limită. Spre exemplu dacă domeniul ocupat de fluid este un corp solid condițiile la limită pot fi definite în modul următor:

- la infinit efectul perturbator al corpului solid este nul; dacă alegem pe Ox în lungul direcției de mișcare, putem scrie:

$$\lim_{x, y, z \rightarrow \infty} u(x, y, z) = u_\infty = |\vec{v}|; \quad \lim_{x, y, z \rightarrow \infty} v(x, y, z) = \lim_{x, y, z \rightarrow \infty} w(x, y, z) = 0 \quad (4.8)$$

- fluidul fiind considerat perfect nu aderă la corp, ci alunecă în jurul conturului său, care devine astfel o linie de curent pe contur existând doar componenta tangențială a vitezei cealaltă componentă normală fiind nulă. Ecuațiile stabilite mai sus poartă

numele de ecuațiile lui Euler pentru dinamica fluidelor ideale. Ele pot fi scrise și sub formă vectorială:

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{f}_m - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad (4.9)$$

În unele cazuri, ecuațiile de mișcare ale fluidelor ideale sub forma dată de Euler nu sunt comode pentru integrare. Dacă se înlocuiesc componentele accelerației cu expresiile (3.9), unde $V^2 = u^2 + v^2 + w^2$, se obțin ecuațiile de mișcare ale fluidelor ideale sub forma dată de Helmholtz:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right) + w \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - v \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V^2}{2} \right) + u \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - w \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V^2}{2} \right) + v \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - u \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases} \quad (4.10)$$

$\underbrace{\quad}_{\text{Forță unitară locală de inerție}}$
 $\underbrace{\quad}_{\text{Forță unitară convectivă datorată variației energiei cinetice}}$
 $\underbrace{\quad}_{\text{Forță unitară convectivă datorată variației vârtejului}}$
 $\underbrace{\quad}_{\text{Forță unitară masică}}$
 $\underbrace{\quad}_{\text{Forță unitară de presiune}}$
 $\underbrace{\quad}_{\text{Forțe unitare exterioare}}$

$\underbrace{\quad}_{\text{Forțe unitare de inerție}}$

Ecuațiile pot fi scrise și sub formă vectorială:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \text{grad} \frac{V^2}{2} + \text{rot} \bar{V} \times \bar{V} = \bar{f}_m - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \quad (4.11)$$

Dacă forțele masice derivă dintr-un potențial, $\bar{f}_m = -\text{grad} U$, adică $X = -\frac{\partial U}{\partial x}$, $Y = -\frac{\partial U}{\partial y}$, $Z = -\frac{\partial U}{\partial z}$ și dacă se ține cont de relația $\bar{f}_m = \frac{1}{\rho} \text{grad } p = \text{grad} \int \frac{\partial p}{\rho}$ rezultă:

$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{dp}{\rho}$; $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{dp}{\rho}$; $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{dp}{\rho}$ și ecuațiile de mișcare ale fluidelor se scriu sub forma dată de Gromeka-Lamb:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U \right) + w \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - v \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U \right) + u \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - w \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U \right) + v \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - u \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

Ecuațiile pot fi scrise și sub formă vectorială:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U \right) + \text{rot} \bar{V} \times \bar{V} = 0 \quad (4.13)$$

$$\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U = E \quad (4.14)$$

Expresia (4.14) este numită și funcția lui Bernoulli, în care toți termenii au dimensiunea de energie unitară, arată că energia totală a fluidului este formată din energie cinetică $\frac{V^2}{2}$, energie potențială de presiune $\int \frac{dp}{\rho}$ și energia potențială a forțelor masice U .

4.2. Relația lui Bernoulli pentru fluide ideale pe o linie de curent

Pentru stabilirea relației sunt necesare condiții suplimentare pentru mișcarea fluidului:

- relația se va stabili pe o linie de curent de ecuații:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (4.15)$$

- câmpul forțelor masice este un câmp potențial, deci:

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad (4.16)$$

- mișcarea fluidului să fie permanentă, adică parametrii hidrodinamici să fie funcție numai de punct nu și de timp, de unde rezultă:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (4.17)$$

- mișcarea fluidului să fie potențială (irotațională), adică componentele vitezei să poată fi exprimate în funcție de un potențial $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$, de unde rezultă că și $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$.

Dacă exprimăm ecuația de mișcare dată de Gromeka-Lamb în care introducem componentele vectorului vârtej, obținem relațiile:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U \right) + 2(w\omega_y - v\omega_z) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U \right) + 2(u\omega_z - w\omega_x) = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U \right) + 2(v\omega_x - u\omega_y) = 0 \end{cases} \quad (4.18)$$

Înmulțind aceste ecuații cu dx , dy , dz și adunând, obținem:

$$\frac{\partial}{\partial t} (u dx + v dy + w dz) + d \left(\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U \right) + 2 \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0 \quad (4.19)$$

În cazul condițiilor suplimentare impuse, ecuația obținută devine:

$$d \left(\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U \right) = 0 \quad (4.20)$$

Dacă se integrează această ecuație între două puncte situate pe o linie de curent sau între două puncte oarecare aflate într-un curent în mișcare potențială se obține:

$$\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U = C \quad (4.21)$$

unde C este o valoare constantă în toată masa fluidului.

În cazul mișcărilor permanente a fluidelor incompresibile ($\rho = \text{const.}$) în câmp gravitațional ($U = gz + \text{const.}$) relația devine:

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 \text{ sau } \frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \quad (4.22)$$

În cazul mișcării permanente a fluidelor practic incompresibile, care au loc într-un câmp de forțe masice neglijabile ($\vec{f}_m \cong 0$, deci $U = \text{const.}$), relația se scrie:

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} \quad (4.23)$$

Ecuația (4.23) reprezintă relația lui Bernoulli pentru fluide ușoare (în situații când pot fi considerate practic incompresibile) la viteze și presiuni relativ mici (de exemplu în confuzorul unui ventilator, absorbția aerului într-un carburator, în conducte de aerisire) sau pentru lichide dacă forțele de greutate pot fi neglijate față de forțele de inerție și forțele de presiune (de exemplu la mișcarea prin sisteme de acționări sub presiune care nu prezintă diferențe mari de cote, mișcarea apei prin conducte practic orizontale de diametru mic). În unele cazuri relația se mai poate scrie sub forma:

$$p_1 + \rho \frac{V_1^2}{2} = p_2 + \rho \frac{V_2^2}{2} \quad (4.24)$$

în care p este presiunea piezometrică (numită și presiune statică), $\rho \frac{V^2}{2}$ este presiunea

dinamică, iar suma $p + \rho \frac{V^2}{2}$ este presiunea totală.

Reprezentarea grafică și interpretarea energetică a relației lui Bernoulli

Efectuând analiza dimensională a termenilor din relația (4.21), se observă că fiecare are dimensiuni de lungime, fapt ce permite o reprezentare grafică a întregii expresii.

Considerăm un plan de referință orizontal O-O ales arbitrar și linia de curent C-C, oarecare, pe care alegem trei puncte M_1, M_2, M_3 care au față de plan coordonatele z_1, z_2, z_3 , iar particulele care trec prin aceste puncte au parametrii hidrodinamici $(V_1, p_1), (V_2, p_2), (V_3, p_3)$, figura 27.

Egalitățile arată că suma celor trei segmente $z, \frac{p}{\gamma}, \frac{V^2}{2g}$ trebuie să fie aceeași pentru toate punctele. Locul geometric al punctelor aflate la extremitatea segmentelor $\left(z + \frac{p}{\gamma}\right)$, linia P-P, poartă denumirea de linie piezometrică, iar linia E-E, care prin construcție este orizontală și deci paralelă cu O-O poartă denumirea de linie energetică sau nivel energetic.

Se aplică relația lui Bernoulli pentru cele trei puncte situate pe linia de curent:

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 = \frac{V_3^2}{2g} + \frac{p_3}{\gamma} + z_3 = \text{Const.} \quad (4.25)$$

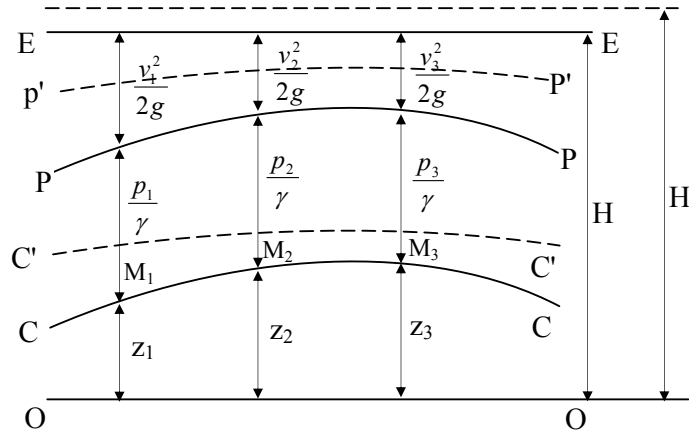


Fig. 27. Reprezentarea grafică a relației lui Bernoulli

Distanța H reprezintă grafic valoarea constantei din relația lui Bernoulli și variază de la o linie de curent la alta. Astfel pentru altă linie de curent notată $C'-C'$ linia piezometrică este $P'-P'$ și constanta are valoarea H' .

Pentru interpretarea energetică a relației lui Bernoulli, înmulțim relația cu greutatea particulei $m \cdot g$. Rezultă: $\frac{mV^2}{2} + pV + mgz = \text{Const.}$

Primul termen reprezintă energia cinetică a particulei, cel de-al doilea termen reprezintă energia potențială de presiune și al treilea este energia potențială de poziție.

Putem concluziona că pentru un fluid aflat în mișcare permanentă la care forțele masice derivă dintr-un potențial, suma dintre energia cinetică, energia potențială de presiune și energia potențială de poziție rămâne constantă pentru toate punctele situate pe aceeași linie de curent.

4.3. Relația lui Bernoulli în mișcare semipermanentă în lungul unei traiectorii

Mișcarea semipermanentă a unui fluid este mișcarea în care în diferite puncte ale fluidului vitezele particulelor variază doar ca mărime, nu și ca direcție.

În acest caz liniile de curent și traiectoriile coincid; de exemplu mișcarea variabilă a unui fluid într-un tub cu pereți solizi și imobili.

Ecuția de mișcare sub forma vectorială este: $\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{f}_m - \frac{1}{\rho} \text{grad } p$ și ținând cont că în coordonatele intrinseci componentele accelerației sunt:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}, \quad a_v = \frac{V^2}{R_c}, \quad a_\beta = 0 \quad (4.26)$$

De asemenea știind că:

$\vec{f}_m = -\text{grad}U$ și $\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \text{grad} \int \frac{dp}{\rho}$, ecuația de mișcare se scrie:

$$\bar{a} + \text{grad} \left(\int \frac{dp}{\rho} + U \right) = 0$$

Această ecuație este proiectată pe cele trei axe ale triedrului lui Frenet și ținând seama că fluidul este incompresibil ($\rho = \text{const.}$), se ajunge la următorul sistem:

$$\begin{cases} \frac{dV}{dT} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) = 0 \\ \frac{V^2}{R_c} + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{p}{\rho} + gz \right) = 0 \end{cases} \quad (4.27)$$

În prima ecuație a sistemului înlocuim derivata substanțială a vitezei $\frac{dV}{dt}$ cu expresia: $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial s} \frac{ds}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial s} V = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{V^2}{2} \right)$

Înlocuind, obținem:
$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U \right) = 0 \quad (4.28)$$

Integrăm în lungul traiectoriei, între două puncte și rezultă:

$$\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U + \int_0^s \frac{\partial V}{\partial t} ds = C(t) \quad (4.29)$$

în care constanta $C(t)$ depinde numai de timp.

În cazul fluidelor incompresibile în câmpul gravitațional relația se scrie sub forma: $\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 + \int_0^{s_1} \frac{\partial V}{\partial t} ds = \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \int_0^{s_2} \frac{\partial V}{\partial t} ds$ sau, ținând cont că:

$$\int_0^{s_2} \frac{\partial V}{\partial t} ds - \int_0^{s_1} \frac{\partial V}{\partial t} ds = \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial V}{\partial t} ds \quad \text{și că} \quad \gamma = \rho \cdot g$$

obținem:
$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + z_1 = \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + z_2 + \frac{1}{g} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial V}{\partial t} ds \quad (4.30)$$

Ecuația (4.30) reprezintă relația lui Bernoulli a fluidelor incompresibile aflate în mișcare semipermanentă, cu următoarea reprezentare grafică, figura 28.

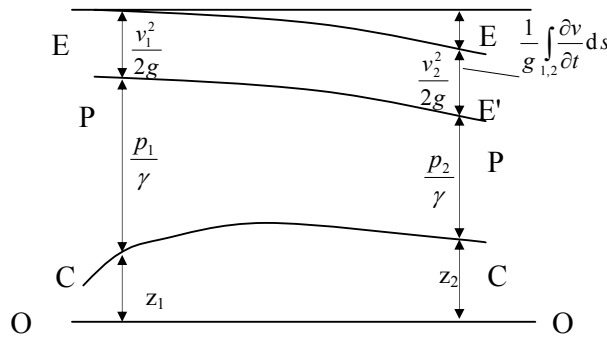


Fig. 28 Reprezentarea grafică a relației lui Bernoulli pentru mișcarea semipermanentă

4.4. Relația lui Bernoulli în mișcarea potențială nepermanentă

În cazul acestei mișcări, componentele vitezei au expresiile:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (4.31)$$

în care funcția $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$ este potențialul vitezelor.

Înmulțind ecuațiile de mișcare sub forma dată de Gromeka-Lamb, respectiv cu dx , dy , dz și adunând obținem:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u dx + v dy + w dz) + d\left(\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U\right) + 2 \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0 \quad (4.32)$$

Primul termen al ecuației se poate scrie sub forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}(u dx + v dy + w dz) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz\right) = \frac{\partial}{\partial t}(d\varphi) = d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) \quad (4.33)$$

Al treilea termen al ecuației este nul, deoarece $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$. Ecuația 4.33 devine:

$$d\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) + d\left(\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U\right) = 0 \quad (4.34)$$

care se integrează în raport cu spațiul și rezultă:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U = C(t) \quad (4.35)$$

unde constanta C depinde numai de timp. Relația (4.35) constituie relația lui Bernoulli pentru mișcarea nepermanentă potențială cunoscută și sub numele de relația lui

Lagrange. Dacă mișcarea este permanentă, $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ și relația devine:

$$\frac{V^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U = C \quad (4.36)$$

unde constanta C nu depinde de timp și este aceeași în toate punctele fluidului în mișcare.

Reprezentarea grafică a relației lui Bernoulli pentru mișcarea potențială permanentă este redată în figura 32.

4.5. Relația lui Bernoulli pentru curenți cu secțiune finită

Relația lui Bernoulli poate fi exprimată și pentru un tub de curent de secțiune finită în care vitezele nu sunt uniform distribuite într-o secțiune oarecare transversală.

Scrierea relației lui Bernoulli pentru fiecare linie de curent ar necesita cunoașterea repartiției vitezelor și presiunilor, deci integrarea ecuațiilor de mișcare. De aceea căutăm să stabilim în ce condiții relația lui Bernoulli este valabilă pe o linie de curent fictivă pe care fluidul ar avea viteze egale cu vitezele medii în secțiunile transversale ale curentului considerat.

Într-o secțiune ortogonală a unui curent de fluid repartiția de presiuni este hidrostatică, deci $p + \gamma \cdot z = \text{const}$, de aceea putem alege o linie de curent convenabilă (axa unei conducte sau suprafața liberă a unui canal) termenul cinematic necesită însă o

corecție, deoarece este exprimat funcție de viteza medie a fluidului în secțiunea normală considerată.

Puterea elementară a fluidului care trece prin aria dA a secțiunii transversale în unitatea de timp este energia specifică unității de greutate, dată de relația:

$$e = \frac{p}{\gamma} + z + \frac{V^2}{2g} \quad (4.37)$$

Relația (4.37) înmulțită cu debitul de greutate elementar care trece prin secțiunea dA , $dQ_G = \gamma dQ = \gamma \cdot V \cdot dA$ conduce la relația:

$$dP = \left(\frac{p}{\gamma} + z + \frac{V^2}{2g} \right) \gamma \cdot V \cdot dA \quad (4.38)$$

$$\text{Puterea totală este: } P = \int_A \left(\frac{p}{\gamma} + z \right) \gamma \cdot V dA + \frac{\gamma}{2g} \int_A V^3 dA \quad (4.39)$$

Deoarece $\frac{p}{\gamma} + z = \text{const.}$ și $\int_A V dA = Q$, rezultă:

$$P = \gamma \cdot Q \left(\frac{p}{\gamma} + z \right) + \frac{\gamma}{2g} \int_A V^3 dA \quad (4.40)$$

Viteza V poate fi exprimată funcție de viteza medie $V = V_m + \Delta V$; rezultă:

$$\int_A V^3 dA = \int_A (V_m + \Delta V)^3 dA = V_m^3 \int_A dA + 3V_m^2 \int_A \Delta V dA + 3V_m \int_A (\Delta V)^2 dA + \int_A (\Delta V)^3 dA \quad (4.41)$$

Se neglijează termenul $\int_A (\Delta V)^3 dA$ în raport cu ceilalți, iar termenul al treilea este nul deoarece:

$$\int_A (\Delta V) dA = \int_A (V - V_m) dA = \int_A V dA - V_m A = Q - Q = 0$$

$$\text{și rezultă: } \int_A V^3 dA = V_m^3 A + 3V_m \int_A (\Delta V)^2 dA \quad (4.42)$$

$$\text{Facem următoarea notație: } \frac{\int_A V^3 dA}{V_m^3 A} = 1 + \frac{3 \int_A (\Delta V)^2 dA}{V_m^2 A} = \alpha$$

deci: $\int_A V^3 dA = \alpha \cdot V_m^3 \cdot A = \alpha \cdot Q \cdot V_m$. Expresia puterii hidraulice a tubului de curent în secțiunea considerată devine:

$$P = \gamma \cdot Q \left(\frac{p}{\gamma} + z + \frac{\alpha \cdot V_m^2}{2g} \right) \quad (4.43)$$

Energia specifică medie a secțiunii este:

$$e_m = \frac{p}{\gamma} + z + \frac{\alpha \cdot V_m^2}{2g} \quad (4.44)$$

Relația lui Bernoulli între două secțiuni se scrie în funcție de vitezele medii astfel:

$$\alpha_1 \cdot \frac{V_{1m}^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \alpha_2 \cdot \frac{V_{2m}^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \quad (4.45)$$

unde se admite de obicei ca $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Coeficientul α se numește coeficientul lui Coriolis și se poate calcula cu relațiile:

$$\alpha = \frac{\int_A V^3}{V_m^3 A} = \frac{\int_A \frac{V^2}{2} \rho dQ dt}{\frac{V_m^2}{2} \rho \cdot Q dt} \quad (4.46)$$

Acest coeficient caracterizează influența neuniformității vitezei v în secțiunea transversală a unui curent de fluid, asupra mărimii energiei cinetice a masei de fluid care trece prin secțiunea transversală în intervalul de timp dt .

Coeficientul lui Coriolis ia valori cuprinse între 1,05 și 1,15.

4.6. Calculul debitului prin orificii

Orificiul este o deschizătură practică în pereții sau fundul unui rezervor în care se află fluid. Conturul orificiului este situat în întregime sub nivelul suprafeței libere.

Din punct de vedere al calcului hidraulic al debitelor orificiile pot fi mici sau mari. Un orificiu se numește mic dacă dimensiunea sa pe verticală (d) nu depășește o zecime din sarcina h măsurată până în centrul orificiului, figura 29.

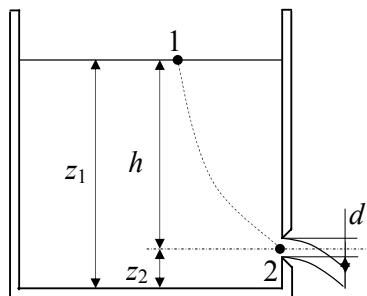


Fig. 29. Orificiu mic

În această situație, se poate considera că în secțiunea transversală a vânei de fluid în dreptul orificiului, parametrii hidrodinamici v și p nu variază sensibil putând fi considerați constanți.

Dacă $d > \frac{h}{10}$, viteza și presiunea variază considerabil de la un punct la altul în secțiunea orificiului, care se consideră în acest caz orificiu mare.

După grosimea peretelui în care este practicat orificiul deosebim orificii în pereți subțiri când fluidul se dezlipește de pereții interiori ai orificiului și orificii în pereți groși, când fluidul se lipește de pereții interiori formând un mic ajutoraj.

În cazul scurgerii unui lichid putem deosebi orificii libere, când evacuarea are loc în atmosferă sau în alt mediu gazos și orificii înecate dacă evacuarea are loc în același sau în alt mediu lichid.

a) *Calculul debitului printr-un orificiu mic, liber cu perete subțire*

În cazul mișcării permanente putem scrie relația lui Bernoulli pe o linie de curent între punctul 1 situat pe suprafața liberă și punctul 2 aflat în secțiunea orificiului, figura 41:

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 \quad (4.72)$$

$$\text{Adăugăm și ecuația continuității sub forma: } V_1 S_1 = V_2 S_2 \quad (4.73)$$

sau: $V_1 = V_2 \frac{S_2}{S_1} = V_2 n$ unde: $n = \frac{S_2}{S_1}$

Revenind la relația lui Bernoulli, obținem:

$$n^2 \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2$$

$$\text{de unde: } V_2 = \sqrt{\frac{2g}{1-n^2} \left[(z_1 - z_2) + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} \right]} \quad (4.74)$$

relație care dă valoarea vitezei fluidului perfect prin orificii mici în mișcarea permanentă și poartă denumirea de relația lui Torricelli.

În cazul în care $S_1 \gg S_2$ ($n^2 = 0$) și $p_1 = p_2 = p_0$, relația devine:

$$V_2 = \sqrt{2gh} \text{ și } Q = S_2 \sqrt{2gh} \quad (4.75)$$

b) *Calculul debitului prin orificiu mic înecat*

În secțiunea de ieșire din orificiu presiunea este dată de valoarea presiunii din rezervorul al doilea, figura 30.

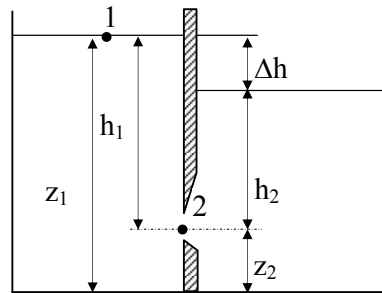


Fig. 30. Orificiu mic înecat

Reluăm calculele de la orificiul mic liber:

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2$$

unde $p_2 = p_0 + \gamma h$, $z_2 - z_1 = h$, $p_1 = p_0$ și $v_1 \cong 0$.

$$\text{Rezultă: } V_2 = \sqrt{2g(h_2 - h_1)} = \sqrt{2g\Delta h} \text{ și } Q = S_2 \sqrt{2g\Delta h} \quad (4.76)$$

c) *Calculul debitului unui orificiu mare*

În secțiunea unui orificiu mare, viteza și presiunea nu mai sunt constante, ci variază în funcție de cota punctului.

Considerăm un orificiu mic de înălțime dz și lățime $b(z)$, figura 31.

Pe un astfel de orificiu mic viteza este constantă și are valoarea $v = \sqrt{2gz}$.

Conform ecuației (4.75), debitul de fluid ce trece prin acest orificiu mic este:

$$dQ = v dS = \sqrt{2gz} \cdot b(z) dz$$

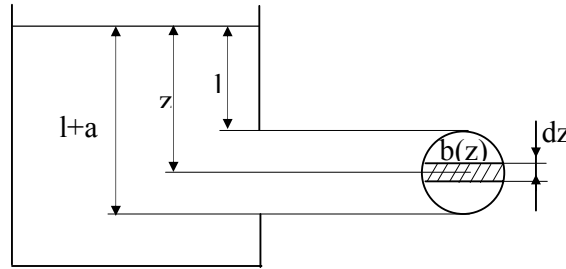


Fig. 313 Orificiu mare

Debitul total prin orificiu este: $Q = \sqrt{2g} \int_l^{l+a} z^{\frac{1}{2}} b(z) dz$

unde funcția $b(z)$ exprimă din punct de vedere analitic forma geometrică în planul peretelui, a orificiului mare.

De exemplu pentru un orificiu dreptunghiular $b(z) = b = \text{const.}$, expresia debitului

este: $Q = \frac{2}{3} \sqrt{2g} \cdot b \left[(l+a)^{\frac{3}{2}} - l^{\frac{3}{2}} \right]$

La limită când $l = 0$, orificiul mare devine un deversor (un orificiu mare care nu are tot conturul sub nivelul lichidului). Debitul deversoarelor se calculează în mod analog, având în vedere valoarea nulă a limitei inferioare de integrare. Pentru un deversor dreptunghiular de adâncime a , debitul este:

$$Q = \int_0^a \sqrt{2gz} \cdot b dz = \frac{2}{3} \sqrt{2g} \cdot b \cdot a^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{2ga} \cdot b \cdot a = \frac{2}{3} \sqrt{2ga} \cdot S \quad (4.77)$$

4.7. Teorema impulsului și teorema momentului cinetic în cazul mișcării permanente a fluidelor

În dinamica punctului material de masă m și care are viteza v , impulsul și momentul cinetic se calculează cu relațiile:

$$\vec{H} = m \cdot \vec{v} \quad \vec{K}_0 = \vec{r} \times m\vec{v} \quad (4.78)$$

Pentru un sistem de puncte materiale impulsul și momentul cinetic total au

expresiile: $\vec{H} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i \quad \vec{K}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \quad (4.79)$

Pentru un rigid impulsul și momentul cinetic se calculează cu relațiile:

$$\vec{H} = \int_D \vec{v} dm \quad \vec{K}_0 = \int_D \vec{r} \times \vec{v} dm \quad (4.80)$$

unde D este domeniul ocupat de rigid în spațiu.

Teoremele impulsului și a momentului cinetic pentru un punct material se definesc astfel: variația în timp a impulsului este suma forțelor exterioare, respectiv derivata în timp a momentului cinetic este momentul resultant al forțelor exterioare.

Referindu-ne la un fluid în mișcare putem defini un domeniu continuu din spațiu ca “volum de control”, notat D , mărginit de o suprafață închisă, S . Domeniul este format dintr-o infinitate de particule fluide de masă $dm = \rho \cdot d\tau$ asupra cărora acționează câmpul de viteze \vec{v} . Impulsul, respectiv momentul cinetic pentru volumul de control vor fi:

$$\vec{H} = \int_D \vec{v} dm \quad \vec{K}_0 = \int_D \vec{r} \times \vec{v} dm \quad (4.81)$$

sau:
$$\vec{H} = \int_D \rho \cdot \vec{v} d\tau \quad \vec{K}_0 = \int_D \vec{r} \times \rho \cdot \vec{v} d\tau \quad (4.82)$$

Teoremele impulsului și momentului cinetic au expresiile:

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho \cdot \vec{v} d\tau = \sum \vec{F}_e \quad \frac{d}{dt} \int_D \vec{r} \times \rho \cdot \vec{v} d\tau = \sum \vec{r} \times \vec{F}_e \quad (4.83)$$

Considerăm două poziții succesive ocupate de volumul de control la timpii t_1 , respectiv $t_2 = t_1 + \Delta t$ determinate de AMBN și de A'M'B'N', figura 32

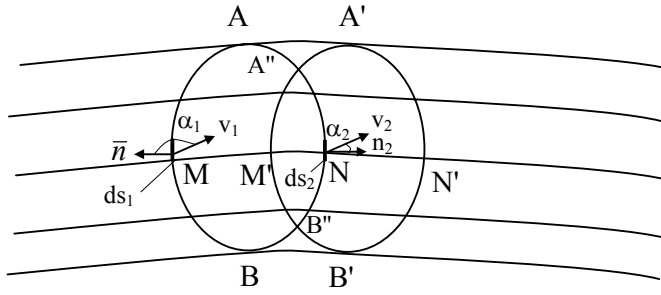


Fig. 32. Două poziții succesive ale unui volum de control

Exprimăm derivata impulsului pornind de la definiția derivatei:

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho \cdot \vec{v} d\tau = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\int_{D_2} \rho \cdot \vec{v}_2 d\tau_2 - \int_{D_1} \rho \cdot \vec{v}_1 d\tau_1}{t_2 - t_1}$$

sau:
$$\frac{d}{dt} \int_D \rho \cdot \vec{v} d\tau = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\int_{A''NB''B''N'A'A''} \rho \cdot \vec{v}_2 d\tau_2 - \int_{A'AMBB''M'A''} \rho \cdot \vec{v}_1 d\tau_1}{\Delta t}$$

Se observă că diferența integralelor pe porțiunea comună celor două domenii se anulează.

Putem să exprimăm impulsul cu ajutorul unei integrale de suprafață, având posibilitatea să scriem elementul de volum $d\tau$ sub forma $d\tau_2 = dS_2 v_2 \cos \alpha_2 \cdot \Delta t$, conform figurii 33.

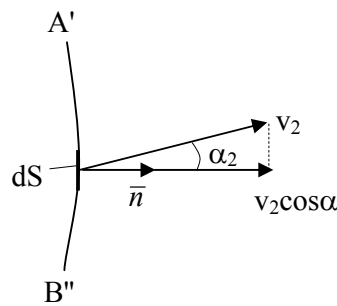


Fig. 33 Element de suprafață

Impulsul din volumul mărginit de suprafața A'NB'B'N'A'A" este determinat de pătrunderea particulelor prin suprafața A"NB", iar impulsul din volumul mărginit de suprafața A"AMBB'M'A" este determinat de pătrunderea particulelor de fluid prin suprafața AMB. Rezultă că putem scrie:

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho \cdot \bar{v} d\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\left(\int_{A'NB''} \rho \cdot \bar{v}_2 v_2 \cos \alpha_2 dS_2 - \int_{D_1} \rho \cdot \bar{v}_1 v_1 \cos \alpha_1 dS_1 \right) \cdot \Delta t}{\Delta t}$$

Prin trecerea la limită pentru $\Delta t \rightarrow 0$, raportul $\frac{\Delta t}{\Delta t} \rightarrow 1$, punctul A'' \rightarrow A, (concomitent A' \rightarrow A), respectiv B'' și B' tind către B, iar relația devine:

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho \cdot \bar{v} d\tau = \int_{ANB} \rho \cdot \bar{v}_2 v_2 \cos \alpha_2 dS_2 - \int_{AMB} \rho \cdot \bar{v}_1 v_1 \cos \alpha_1 dS_1$$

Suprafața ANB se notează cu S_2 și este numită suprafață de ieșire și reprezintă porțiunea din suprafața S pe care vectorul viteză este dirijat spre exterior, la fel ca și normala exterioară \bar{n} .

Cealaltă parte a suprafeței S (AMB), notată S_1 , se numește suprafață de intrare și pe ea vectorul viteză este dirijat spre interior, în sens opus normalei exterioare \bar{n} .

Notând cu I_1 și I_2 impulsurile prin suprafețele de intrare, respectiv ieșire, teorema impulsului se scrie sub forma:

$$\bar{I}_2 - \bar{I}_1 = \int_{S_2} \rho \cdot \bar{v} v \cos \alpha \cdot dS - \int_{S_1} \rho \cdot \bar{v} v \cos \alpha \cdot dS = \sum \bar{F}_e \quad (4.84)$$

Forțele exterioare care acționează asupra fluidului din domeniul D, sunt forțe masice (de greutate) și forțe de suprafață (de presiune).

Deoarece impulsul orientat spre interiorul domeniului se reprezintă convențional cu semnul minus, iar cel orientat spre exteriorul domeniului cu semnul plus și deoarece $S = S_1 + S_2$, teorema impulsului poate fi scrisă sub forma:

$$\int_S \rho \cdot \bar{v} v \cos \alpha \cdot dS = \sum \bar{F}_e \quad (4.85)$$

În mod analog putem scrie și teorema momentului cinetic:

$$\int_{S_2} \bar{r} \times \rho \cdot \bar{v} v \cos \alpha \cdot dS - \int_{S_1} \bar{r} \times \rho \cdot \bar{v} v \cos \alpha \cdot dS = \sum \bar{r}_e \times \bar{F}_e \quad (4.86)$$

sau:
$$\int_S \rho \cdot \bar{v} v \cos \alpha \cdot dS = \sum \bar{r}_e \times \bar{F}_e \quad (4.87)$$

Pentru rezolvarea aplicațiilor tehnice de cele mai multe ori teorema impulsului și teorema momentului cinetic se folosesc împreună.

În cazul mișcărilor nepermanente, teorema impulsului se scrie sub forma:

$$\int_D \frac{\partial(\rho \bar{v})}{\partial t} d\tau + \int_S \rho \cdot \bar{v} v \cos \alpha \cdot dS = \sum \bar{F}_e \quad (4.88)$$

în care primul termen reprezintă variația în timp a impulsului. Pentru același caz, teorema momentului cinetic are forma:

$$\int_D \bar{r} \times \frac{\partial(\rho \bar{v})}{\partial t} d\tau + \int_S \bar{r} \times \rho \cdot \bar{v} v \cos \alpha \cdot dS = \sum \bar{r}_e \times \bar{F}_e \quad (4.89)$$

unde primul termen reprezintă variația în timp a momentului cinetic.

Exprimarea impulsului și momentului cinetic cu ajutorul integralelor de suprafață nu necesită cunoașterea structurii curentului din interiorul domeniului, ci numai caracteristicile curentului pe suprafața S .

În cazul fluidelor incompresibile densitatea ρ , poate fi scoasă în fața integralelor.

4.8. Teorema impulsului și teorema momentului cinetic aplicate tuburilor de curent în mișcare permanentă

Considerăm un volum de control delimitat de un tub de curent și două secțiuni ortogonale direcției de curgere a curentului, figura 33.

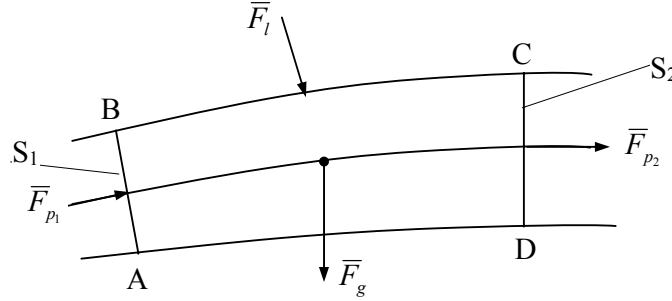


Fig. 33. Tub de curent

Impulsurile prin suprafețele de intrare și de ieșire, I_1 și I_2 au expresiile:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{AB} \rho \cdot \bar{v} v_n dS_1 = \rho \cdot \bar{v}_1 v_1 \int_{AB} dS_1 = \rho \cdot \bar{v}_1 v_1 S_1 = \rho \cdot \bar{v}_1 Q \\ I_2 &= \int_{CD} \rho \cdot \bar{v} v_n dS_2 = \rho \cdot \bar{v}_2 v_2 \int_{CD} dS_2 = \rho \cdot \bar{v}_2 v_2 S_2 = \rho \cdot \bar{v}_2 Q \end{aligned} \quad (4.90)$$

unde \bar{v}_1 și \bar{v}_2 sunt vitezele medii în secțiunile de intrare și de ieșire. Dacă vitezele nu sunt uniform distribuite în secțiunile ortogonale ale tubului de curent eventual se pot introduce și coeficienți de corecție.

Teorema impulsului devine:

$$\rho \cdot Q(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) = \sum \bar{F}_e \quad (4.91)$$

Forțele de suprafață se exercită pe porțiunea de intrare, pe suprafața de ieșire și pe suprafața laterală a tubului. Teorema impulsului se poate scrie sub forma:

$$\rho \cdot Q(\bar{v}_2 - \bar{v}_1) = \bar{F}_{p_1} + \bar{F}_{p_2} + \bar{F}_l + \bar{F}_g \quad (4.92)$$

iar teorema momentului cinetic sub forma:

$$\rho \cdot Q(\bar{r} \times \bar{v}_2 - \bar{r} \times \bar{v}_1) = \bar{r}_1 \times \bar{F}_{p_1} + \bar{r}_2 \times \bar{F}_{p_2} + \bar{r}_l \times \bar{F}_l + \bar{r}_g \times \bar{F}_g \quad (4.93)$$

Mărimile forțelor de presiune \bar{F}_{p_1} și \bar{F}_{p_2} pot fi calculate cu ajutorul formulelor $F_{p_1} = p_1 S_1$ și $F_{p_2} = p_2 S_2$, dacă p_1 și p_2 sunt presiuni medii corespunzătoare vitezelor medii v_1 și v_2 sau pot fi calculate cu ajutorul integralelor de suprafață $F_{p_1} = \int_{S_1} p \bar{n}_1 dS_1$ și

$F_{p_2} = \int_{S_2} p \bar{n}_2 dS_2$ cu condiția cunoașterii repartiției presiunilor pe suprafețele S_1 și S_2 .

\bar{F}_l reprezintă acțiunea porțiunii laterale a tubului de curent. De obicei interesează în aplicații forța exercitată de fluidul în mișcare asupra suprafeței laterale a tubului,

egală și de sens contrar cu \bar{F}_1 ($\bar{F} = -\bar{F}_1$). Din expresiile matematice ale celor două teoreme rezultă:

$$\bar{F} = -\bar{F}_l = \rho \cdot Q(\bar{v}_1 - \bar{v}_2) + \bar{F}_{p_1} + \bar{F}_{p_2} + \bar{F}_g$$

$$\bar{r}_l \times \bar{F} = \rho \cdot Q(\bar{r}_1 \times \bar{v}_1 - \bar{r}_2 \times \bar{v}_2) + \bar{r}_1 \times \bar{F}_{p_1} + \bar{r}_2 \times \bar{F}_{p_2} + \bar{r}_G \times \bar{F}_g \quad (4.94)$$

Variația parametrilor hidrodinamici, \bar{v} și p poate fi analizată ca mărime și apoi ca direcție și sens, ținând cont că variația vitezei implică și variația presiunii, conform cu relația lui Bernoulli și invers. De aici rezultă trei tipuri de aplicații practice:

- mărimea parametrilor hidrodinamici rămâne constantă, variind numai direcția și sensul lor (cazul coturilor de conducte cu diametrul constant), figura 34, a.

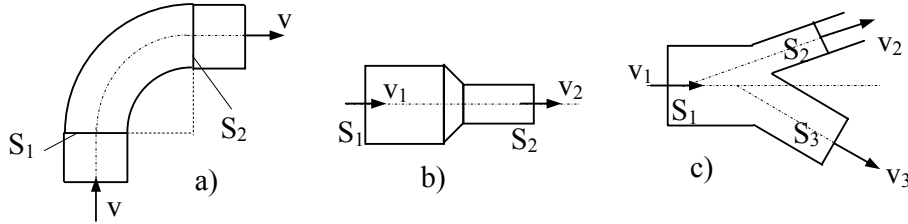


Fig. 34. Variația parametrilor hidrodinamici a direcției și sensului de curgere

- a – variația direcției și a sensului de curgere
- b – variația mărimilor parametrilor hidrodinamici
- c – variația mărimilor parametrilor hidrodinamici și a direcției și sensului de curgere

- mărimea parametrilor hidrodinamici se schimbă între secțiunea de intrare și ieșire, direcția și sensul rămânând același (cazul îngustărilor de conducte unidirecționale), figura 34, b.

- atât mărimea cât și direcția și sensul parametrilor hidrodinamici se modifică între secțiunea de intrare și cea de ieșire (cazul practic al conductelor ramificate), figura 34 c.

5. DINAMICA FLUIDELOR REALE

5.1. Mișcarea laminară a fluidelor reale

În practică există un număr mare de fenomene importante care nu pot fi studiate și explicate fără a ține seama de proprietatea de viscozitate, care caracterizează fluidele reale.

Curgerea fluidelor reale se poate produce în două regimuri diferite de mișcare stabilite în raport cu structura fizică a acestora: regimul laminar și regimul turbulent. Existența acestor regimuri diferite de mișcare a fost pusă în evidență de fizicianul englez Reynolds. Cu ajutorul unei instalații relativ simple, care asigură introducerea în cadrul unui curent de fluid a unui alt fluid colorat, Reynolds a stabilit deosebiri calitative între regimurile de curgere laminar și turbulent și a pus în evidență existența unui regim de tranziție împreună cu parametrii care influențează aceste regimuri.

Mișcarea laminară a unui fluid este mișcarea cu caracter uniform, în care diferite straturi de fluid se mișcă paralel unele față de altele, fără amestecul particulelor componente diferitelor straturi.

Mișcarea turbulentă este mișcarea cu aspect neuniform, în care diferitele particule componente se amestecă între ele și se mișcă pe traiectorii neregulate și variabile în timp.

Reynolds a stabilit că factorii care determină cele două regimuri de curgere, laminar sau turbulent, la curgerea lichidului printr-o conductă sunt viteza medie de curgere v , diametrul conductei D și viscozitatea cinematică ν . Pentru caracterizarea regimului de curgere a lichidului, se introduce mărimea adimensională $Re = \frac{vD}{\nu}$ numită

numărul lui Reynolds. Dacă mișcarea lichidului se realizează pentru a valoare a numărului lui Reynolds mai mică decât o valoare numită critică, (pentru conducte circulare în cazul apei $Re_{cr} = 2300$), mișcarea este laminară.

S-a stabilit experimental și teoretic că în mișcarea laminară lichidul întâmpină o rezistență proporțională cu viteza medie, iar în regimul turbulent, la numere Reynolds mari, rezistența este proporțională cu pătratul vitezei. Fenomenul este general pentru toate fluidele deci și pentru gaze.

La secțiuni ale conductei de alte forme decât cercul, diametrul D poate fi înlocuit în formula numărului lui Reynolds cu $4R$, unde R este raza hidraulică.

5.2. Starea de tensiune într-un fluid în mișcare

Pentru definirea tensiunii unitare \bar{p}_n într-un punct oarecare se consideră un element de suprafață dS_n care conține acest punct, orientarea lui fiind precizată de vectorul normalei. Tensiunea unitară \bar{p}_n este determinată de relația:

$$\bar{p}_n = \frac{d\bar{F}}{dS_n} \quad (5.1)$$

unde $d\bar{F}$ este forța elementară de suprafață care reprezintă interacțiunea dintre particulele de fluid separate de elementul de suprafață dS_n .

Considerăm un volum de fluid $d\tau$ de forma unui tetraedru, figura 35 căruia îi atașăm un sistem de referință $Oxyz$. Ecuația de mișcare a volumului elementar este de forma:

$$\rho \frac{d\bar{v}}{dt} d\tau = \rho \cdot \bar{f}_m d\tau + \bar{p}_n dS_n + \bar{p}_x dS_x + \bar{p}_y dS_y + \bar{p}_z dS_z$$

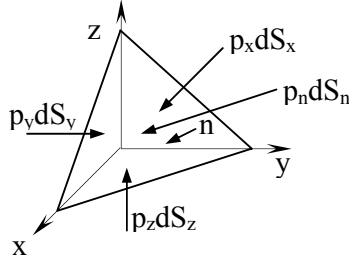


Fig. 35. Volum de fluid sub forma unui tetraedru

Neglijând variația elementului de volum și ținând cont că dS_x , dS_y , dS_z sunt proiecțiile elementului de suprafață dS_n obținem:

$$-\bar{p}_n = \bar{p}_x \cos(\widehat{n, x}) + \bar{p}_y \cos(\widehat{n, y}) + \bar{p}_z \cos(\widehat{n, z})$$

Relația vectorială se poate exprima și scalar prin trei ecuații, utilizând componentele după cele trei direcții ale triedrului de referință:

$$\begin{cases} p_{n_x} = p_{xx} \cos(\widehat{n, x}) + p_{yx} \cos(\widehat{n, y}) + p_{zx} \cos(\widehat{n, z}) \\ p_{n_y} = p_{xy} \cos(\widehat{n, x}) + p_{yy} \cos(\widehat{n, y}) + p_{zy} \cos(\widehat{n, z}) \\ p_{n_z} = p_{xz} \cos(\widehat{n, x}) + p_{yz} \cos(\widehat{n, y}) + p_{zz} \cos(\widehat{n, z}) \end{cases} \quad (5.2)$$

Așa cum rezultă din sistemul de mai sus, starea de tensiune dintr-un fluid real în mișcare este dată de un tensor de ordinul doi, numit tensorul tensiunilor unitare, care poate fi exprimat cu ajutorul matricei:

$$\begin{vmatrix} p_{xx} & p_{yx} & p_{zx} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{zy} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz} \end{vmatrix} \quad (5.3)$$

primul indice indică axa normală pe suprafața considerată, iar al doilea indice precizează direcția de acțiune a tensiunii unitare. Tensiunile unitare p_{xx} , p_{yy} , p_{zz} se notează în mod obișnuit cu σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} . Tensiunile tangențiale sunt egale două câte două $p_{xy} = p_{yx}$, $p_{zy} = p_{yz}$, $p_{xz} = p_{zx}$.

În mod obișnuit tensiunile tangențiale se notează cu τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{xz} . Deci starea de tensiune a unui fluid real în mișcare este dată de tensorul de ordinul al doilea simetric al tensiunilor unitare exprimat cu ajutorul matricei:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \quad (5.4)$$

Suma tensiunilor unitare normale este un invariant cu ajutorul căruia se definește presiunea într-un punct:

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \quad (5.5)$$

În cazurile particulare ale unui fluid real în repaus sau un fluid ideal în mișcare, componentele tangențiale ale tensiunii sunt nule și starea de tensiune este dată doar de presiune:

$$\begin{vmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{vmatrix} \quad (5.6)$$

5.3. Ecuațiile de mișcare a fluidelor reale sub forma dată de Cauchy (în componente de tensiuni)

Considerăm o particulă elementară de fluid de forma unui paralelipiped dreptunghic, desprins dintr-un fluid real aflat în mișcare, de dimensiuni dx , dy , dz , cu muchiile paralele cu axele de coordonate, figura 36.

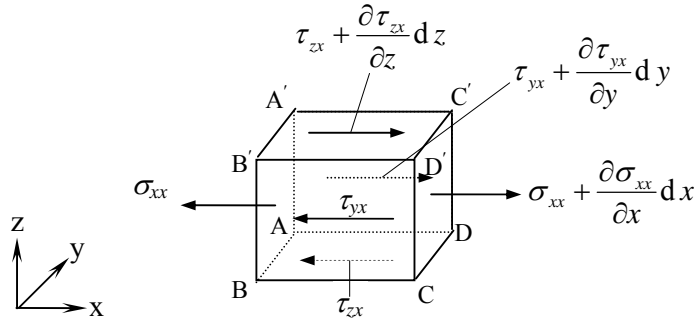


Fig. 36. Particulă de fluid sub formă paralelipedică

Aplicăm legea a doua a dinamicii $\bar{a} \, dm = d\bar{F}_m + d\bar{F}_s$ unde:

- accelerația \bar{a} are componentele $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$;
- masa particulei este $dm = \rho \, dx \, dy \, dz$;
- forța masică se calculează cu ajutorul forței masice unitare și are componentele $X \cdot \rho \, dx \, dy \, dz$, $Y \cdot \rho \, dx \, dy \, dz$, $Z \cdot \rho \, dx \, dy \, dz$;
- forțele de suprafață acționează asupra fiecărei suprafețe ale paralelipedului și sunt date de tensiunile unitare.

Pe fiecare față a particulei, forța de suprafață are trei componente, paralele cu axele de coordonate, una normală și două tangențiale. Tensiunile unitare sunt tensiunile de viscozitate care sunt forțe unitare de legătură cu restul fluidului. Pentru a obține componenta dF_{sx} am trecut pe figură tensiunile σ și τ care se dezvoltă în lungul axei Ox . Pe fața $ABBA'$ va acționa tensiunea normală σ_{xx} , iar pe fața opusă $DCC'D'$ va acționa $\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx$. Pe fața $BCC'B'$ va acționa tensiunea tangențială τ_{yx} , iar pe fața paralelă cu ea $ADD'A'$ va acționa o tensiune în sens contrar $\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy$. Pe fața $ABCD$ va acționa tensiunea tangențială τ_{zx} , iar pe fața paralelă $A'B'C'D'$ o tensiune în sens contrar $\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz$. Forța de suprafață rezultantă se obține înmulțind tensiunile unitare cu ariile suprafețelor pe care se exercită și însumându-le. Pentru componenta după direcția axei Ox , rezultă:

$$dF_{xx} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dx dy dz$$

Legea a doua a dinamicii, proiectată după direcția axei Ox , are expresia:

$$\frac{du}{dt} \rho dx dy dz = X \cdot \rho dx dy dz + \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dx dy dz$$

Se împarte această ecuație cu $\rho dx dy dz$ și se ține cont de forma derivatei totale a vitezei

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}, \text{ obținându-se astfel proiecția pe direcția } Ox. \text{ Pentru}$$

celelalte direcții Oy și Oz calculele fiind analoage. Rezultă:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \\ \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = Y + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \\ \frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \end{cases} \quad (5.7)$$

unde primii termeni din fiecare ecuație reprezintă componentele forței unitare locale de inerție, următorii termeni fiind componentele forței unitare convective de inerție. După egal primii termeni sunt componentele forței unitare masice iar parantezele reprezintă componentele forței unitare de suprafață.

Sistemul reprezintă ecuațiile de mișcare a fluidelor reale sub forma dată de Cauchy, ecuații ce cuprind componentele tensiunilor unitare și în care toți termenii au dimensiunea de forță unitară, corespunzătoare unității de masă.

5.4. Ecuațiile lui Navier-Stokes pentru mișcarea laminară a fluidelor reale

Încercăm să determinăm ecuațiile de mișcare ale fluidelor reale în raport numai de componentele câmpului de viteze. Pentru aceasta trebuie să considerăm legăturile dintre tensiunile unitare, viteze, viscozitate și vitezele de deformare. Pentru fluide reale și incompresibile, tensiunea unitară normală este suma dintre presiunea p și o componentă care depinde de viscozitatea dinamică și de viteza de deformare liniară introdusă de teorema Cauchy-Helmholtz. Rezultă:

$$\sigma_{xx} = -p + 2\eta \cdot a_{xx} = -p + 2\eta \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \sigma_{yy} = -p + 2\eta \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \sigma_{zz} = -p + 2\eta \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (5.8)$$

Pentru fluide reale și compresibile, tensiunea unitară normală ține seama și de viteza relativă de variație a volumului particulei de fluid, θ , printr-un coeficient de viscozitate $\lambda_v = -\frac{2}{3}\eta$, conform relației lui Stokes, din teoria cinetico-moleculară.

Viteza relativă de variație a volumului $\theta = \text{div } \bar{v}$, adică:

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div } \bar{v}$$

Rezultă pentru tensiunile unitare normale relațiile:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = -p + \lambda_v \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\eta a_{xx} = -p + \lambda_v \theta + 2\eta \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_{yy} = -p + \lambda_v \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\eta a_{yy} = -p + \lambda_v \theta + 2\eta \frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_{zz} = -p + \lambda_v \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 2\eta a_{zz} = -p + \lambda_v \theta + 2\eta \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad (5.9)$$

Tensiunile unitare tangențiale sunt proporționale cu vitezele de deformare unghiulară a_{xy} , a_{yz} , a_{zx} introduse prin teorema Cauchy-Helmholtz:

$$\begin{cases} \tau_{xy} = 2\eta \cdot a_{xy} = \eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \tau_{yz} = 2\eta \cdot a_{yz} = \eta \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \tau_{zx} = 2\eta \cdot a_{zx} = \eta \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (5.10)$$

Înlocuind expresiile tensiunilor unitare în ecuațiile de mișcare sub forma enunțată de Cauchy, obținem, de exemplu pentru prima ecuație expresia:

$$\frac{du}{dt} = X + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(-p + \lambda_v \theta + 2\eta \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \eta \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]$$

Luând în considerație relația lui Stokes, relația de definiție a viscozității cinematice

$\nu = \frac{\eta}{\rho}$ și de expresia laplacianului $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, ecuația precedentă și în mod

analog celelalte ecuații de mișcare se scriu sub forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u + \frac{\nu}{3} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v + \frac{\nu}{3} \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w + \frac{\nu}{3} \frac{\partial \theta}{\partial z} \end{cases} \quad (5.11)$$

unde termenii negativi sunt componentele forței unitare de presiune, penultimii termeni ai ecuațiilor sunt componentele forței unitare de viscozitate iar ultimii termeni sunt componentele forței unitare de compresibilitate. Ecuațiile reprezintă ecuațiile de mișcare ale fluidelor reale, compresibile, în mișcare laminară nepermanentă cunoscute sub numele de ecuațiile lui Navier-Stokes pentru mișcarea fluidelor reale. Acestor ecuații li se adaugă ecuația continuității:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (5.12)$$

În cazul fluidelor incompresibile, ecuațiile lui Navier-Stokes și ecuația continuității se scriu sub forma:

$$\begin{cases}
\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v \\
\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w \\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0
\end{cases} \quad (5.13)$$

Ecuatiile lui Navier-Stokes, se pot scrie și sub formă vectorială:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{f}_m - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \bar{v} + \frac{\nu}{3} \text{grad } \theta$$

ecuație care reprezintă ecuația de mișcare a fluidelor vâscoase, compresibile în mișcare laminară nepermanentă, sau pentru fluide incompresibile:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{f}_m - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \bar{v}$$

Sistemul format de ecuațiile Navier-Stokes și ecuația continuității trebuie să satisfacă condițiile inițiale (pentru $t = 0$) și condițiile la limită impuse de mișcarea laminară studiată.

Condițiile la limită sunt condițiile care trebuie verificate pe frontierele curentului de fluid de câmpul vitezelor și câmpul de presiuni.

Înlocuind în ecuațiile de mișcare ale fluidelor reale componentele accelerației cu expresii pe care le-am utilizat și la mișcarea fluidelor ideale, obținem alte forme pentru ecuațiile de mișcare, forme care pun în evidență unele particularități cinematice și energetice ale mișcării. Astfel obținem forma ecuațiilor de mișcare dată de Helmholtz:

$$\begin{cases}
\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} \right) + w \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - v \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u + \frac{\nu}{3} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\
\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v^2}{2} \right) + u \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - w \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v + \frac{\nu}{3} \frac{\partial \theta}{\partial y} \\
\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v^2}{2} \right) + v \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - u \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w + \frac{\nu}{3} \frac{\partial \theta}{\partial z}
\end{cases} \quad (5.14)$$

sau sub formă vectorială:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \text{grad } \frac{v^2}{2} + \text{rot } \bar{v} \times \bar{v} = \bar{f}_m - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \bar{v} + \frac{\nu}{3} \text{grad } \theta \quad (5.15)$$

Semnificațiile termenilor din primul membru au fost date la stabilirea ecuațiilor de mișcare pentru fluide ideale.

Dacă forțele masice derivă dintr-un potențial și ținem cont de relația $\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \text{grad } \int \frac{dp}{\rho}$, atunci putem transforma ecuațiile de mișcare date de Helmholtz și obținem forma dată de Gromeka-Lamb:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U \right) + w \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - v \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \nu \Delta u + \frac{\nu}{3} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U \right) + u \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - w \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \nu \Delta v + \frac{\nu}{3} \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U \right) + v \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - u \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \nu \Delta w + \frac{\nu}{3} \frac{\partial \theta}{\partial z} \end{cases} \quad (5.16)$$

sau sub forma vectorială:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U \right) + \text{rot } \bar{v} \times \bar{v} = \nu \Delta \bar{v} + \frac{\nu}{3} \text{grad } \theta \quad (5.17)$$

În această ecuație intervine expresia $\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U = E$, numită și funcția lui Bernoulli, în care toți termenii au dimensiunea de energie unitară, corespunzătoare unității de masă.

În cazul mișcării permanente termenii care conțin derivate în raport cu timpul sunt nuli, iar dacă considerăm și vectorul vârtej $\bar{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \bar{v}$, ecuațiile de mișcare devin:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U \right) + 2(w\omega_y - v\omega_z) = \nu \Delta u + \frac{\nu}{3} \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U \right) + 2(u\omega_z - w\omega_x) = \nu \Delta v + \frac{\nu}{3} \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U \right) + 2(v\omega_x - u\omega_y) = \nu \Delta w + \frac{\nu}{3} \frac{\partial \theta}{\partial z} \end{cases} \quad (5.18)$$

Înmulțind cele trei ecuații cu deplasările elementare dx , respectiv dy și dz , apoi adunând obținem:

$$d \left(\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U \right) + 2 \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ u & v & w \end{vmatrix} = -\mathcal{D}_v \quad (5.19)$$

unde primul termen reprezintă variația energiei fluide (cinetică potențială de presiune și potențială a forțelor masice), al doilea termen este lucrul mecanic elementar al forțelor convective de inerție datorate vârtejului, iar ultimul termen reprezintă lucrul mecanic elementar al forțelor de viscozitate (cu o componentă a forțelor de compresibilitate în cazul fluidelor incompresibile). Termenul este negativ deoarece forțele de viscozitate sunt dirijate în sens opus sensului de deplasare, iar în cazul fluidelor ideale, el este nul ($\nu = 0$).

Determinantul este nul în următoarele cazuri:

- pe o linie de curent, deoarece: $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$;
- pe o linie de vârtej, deoarece: $\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}$;

- în mișcare elicoidală, la care vectorul viteză este coliniar cu vectorul vârtej, deci: $\frac{u}{\omega_x} = \frac{v}{\omega_y} = \frac{w}{\omega_z}$.

În toate cele trei cazuri, ecuația 49 devine:

$$d\left(\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U\right) = -\delta_l \quad (5.20)$$

care după integrare devine:

$$\left(\frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} + U\right)\bigg|_1^2 = -\int_{1,2} \delta_l \quad (5.21)$$

unde ultimul termen este lucrul mecanic unitar al forțelor de viscozitate dintre cele două puncte și este o energie pierdută (nu poate fi utilizată ca energie hidraulică), care se transformă pe baza legilor dinamicii în căldură.

5.5. Relația lui Bernoulli pentru o linie de curent, în mișcarea laminară a fluidelor reale

Spre deosebire de un fluid ideal, pentru care energia specifică de-a lungul unei linii de curent este constantă, în cazul fluidului real energia acestuia scade în sensul mișcării fluidului, datorită frecărilor de natură vâscoasă între particule. Considerăm cazul fluidelor incompresibile ($\rho = \text{ct.}$) și mișcarea în câmp gravitațional ($U = g \cdot z$). În acest caz, relația lui Bernoulli scrisă între punctele 1 și 2 este:

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 + \int_{1,2} \delta_l$$

sau dacă se împarte cu g și se introduce notația $h_{1,2} = \frac{1}{g} \int_{1,2} \delta_l$ care reprezintă pierderea

de sarcină între punctele 1 și 2, se obține:

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_{1,2}$$

care reprezintă relația lui Bernoulli pentru fluide grele incompresibile. În cazul în care forțele masice sunt neglijabile ($\bar{f}_m = 0$, $U = \text{const.}$), $z_1 = z_2$ și deci cei doi termeni se anulează reciproc.

Dimensiunea fiecărui termen din relația lui Bernoulli pe o linie de curent în cazul unui fluid incompresibil este de lungime. Pentru $\frac{v^2}{2g}, \frac{p}{\gamma}$, verificarea s-a efectuat și în cazul fluidelor ideale, iar pentru termenul:

$$h_r = \frac{1}{g} \int_{1,2} \delta_l = -\frac{1}{g} \int_{1,2} v[\Delta u \cdot dx + \Delta v \cdot dy + \Delta w \cdot dz] + \frac{1}{3} v d(\text{div } \vec{v})$$

este $\frac{1}{LT^2} L^2 T^{-1} \cdot L^{-1} T^{-1} \cdot L = L$. Prin urmare relația lui Bernoulli în mișcarea permanentă în lungul unei linii de curent admite reprezentarea grafică din figura 37.

Pentru interpretarea energetică a relației lui Bernoulli, se înmulțește fiecare termen al relației cu $m \cdot g$. Dacă considerăm că energia unitară totală este: $E = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z$, se poate considera că energia din punctul 1 este mai mare decât cea din punctul 2, adică $E_1 = E_2 + h_{r,2}$

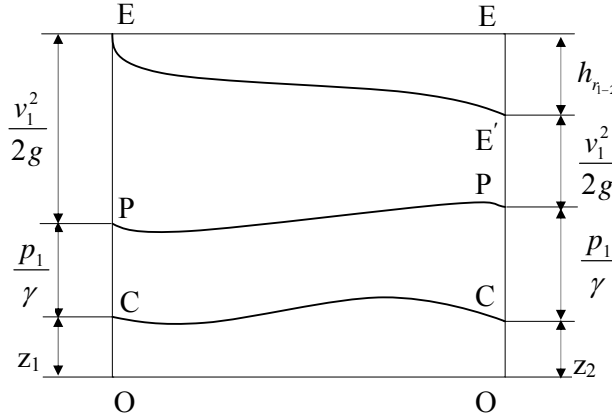


Fig. 37. Reprezentarea grafică a relației lui Bernoulli

În cazul mișcării fluidelor reale relația lui Bernoulli reprezintă aplicarea în mecanica fluidelor a principiului general al transformării și conservării energiei: energia din punctul 1 al liniei de curent este egală cu energia din punctul 2 al liniei de curent la care se adaugă energia pierdută între punctele 1 și 2 datorită frecării vâscoase a fluidelor reale, (energia hidraulică disipată se regăsește sub formă de energie termică).

În cazul mișcării semipermanente la care direcția vitezei este fixă și traiectoriile coincid cu liniile de curent, relația lui Bernoulli se păstrează dar se adaugă la termenul al doilea $h_{r,2}$, reprezentând pierderea de sarcină în lungul traiectoriei între punctele

1 și 2:

$$\frac{V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \frac{1}{g} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial v}{\partial t} ds + h_{r,2}$$

În cazul curenților de fluid cu secțiune finită, energia fluidului într-o secțiune transversală (în care viteza este variabilă), poate fi exprimată funcție de viteza medie pe secțiune, introducând o corecție prin coeficientul lui Coriolis (care reprezintă raportul dintre energia cinetică reală pe secțiune și energia calculată cu viteza medie

$$\int v^3 dA$$

$\frac{\int v^3 dA}{A v^3} = \alpha$), la termenii cinetici. Relația lui Bernoulli pentru un curent real de fluid de secțiune constantă, devine:

$$\frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_{r,2}$$

unde de obicei se admite $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, iar v_1 și v_2 sunt vitezele medii în cele două secțiuni.

Reprezentarea grafică a relației lui Bernoulli pentru mișcarea semipermanentă este analogă celei de la mișcarea fluidelor ideale, cu diferența că apare la punctul 2 încă un segment echivalent cu $h_{r,2}$, figura 38.

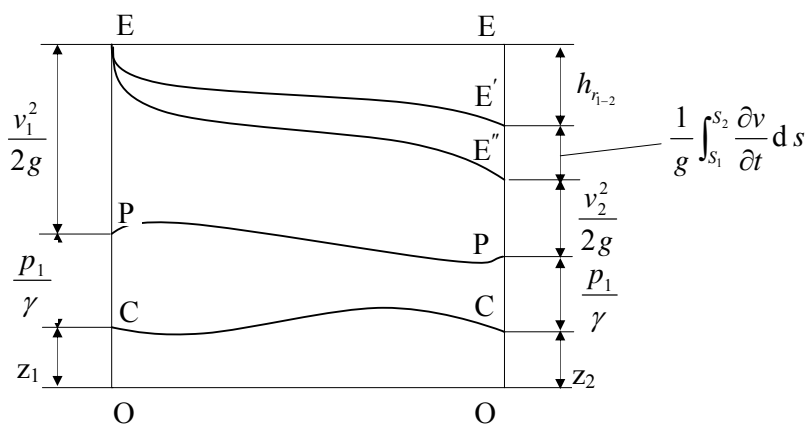


Fig. 38. Reprezentarea grafică a relației lui Bernoulli pentru mișcarea semipermanentă

6. ANALIZA DIMENSIONALĂ ȘI TEORIA SIMILITUDINII

Orice relație matematică a unui fenomen fizic este corect stabilită, dacă pe lângă corectitudinea rezolvării setului de ecuații algebrice sau diferențiale care caracterizează acest fenomen îndeplinește și o altă condiție fundamentală: toți termenii ei trebuie să aibă aceeași dimensiune.

Această condiție necesară pentru valabilitatea unei relații matematice a unui fenomen fizic se numește principiul omogenității.

Pornind de la această condiție obligatorie, putem obține relația de calcul a unei mărimi fizice în funcție de alte mărimi. O asemenea dependență se formează astfel: $A = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ unde structura funcției f nu este cunoscută.

Anumite considerații teoretice privind natura mărimilor a_1, a_2, \dots, a_n , permit unele precizări privind forma funcției f . Acest fel de abordare a problemei constituie obiectul analizei dimensionale.

6.1. Metodele analizei dimensionale

S-au elaborat două metode distincte de prelucrare matematică pe baza principiului omogenității dimensionale a dependenței dintre mărimile fizice a_1, a_2, \dots, a_n și noua mărime fizică A .

a) *Metoda Rayleigh*, se bazează pe aproximația unei funcții continue $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ printr-o sumă de monoame de puteri ale variabilelor a_1, a_2, \dots, a_n :

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n C_i a_1^{x_{i1}} a_2^{x_{i2}} \dots a_n^{x_{in}} \quad (6.1)$$

unde $C_i = Ct$, sunt constante numerice adimensionale, iar $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}$ sunt exponenți adimensionali ce urmează a fi determinați pe baza principiului omogenității dimensionale. Pentru aflarea exponenților x_i , vom impune identificarea dimensională:

$$[A] = [a_1]^{x_{i1}} \cdot [a_2]^{x_{i2}} \dots [a_n]^{x_{in}} \equiv [a_1]^{x_{i1}} [a_2]^{x_{i2}} \dots [a_n]^{x_{in}} \quad (6.2)$$

și vom egala exponenții unităților fundamentale de măsură de aceeași nume din ambii termeni, ceea ce conduce la un sistem de ecuații liniar și omogen în necunoscutele x_i . Acest sistem poate fi compatibil determinat, compatibil nedeterminat, sau incompatibil. În primul caz, prin rezolvarea sistemului rezultă o soluție unică:

$$\begin{aligned} x_{i1} &= \alpha_1 \\ x_{i2} &= \alpha_2 \\ &\vdots \\ x_{in} &= \alpha_n \end{aligned} \quad (6.3)$$

care după înlocuire în expresia mărimii fizice A , determină forma:

$$A = \sum_{i=1}^n C_i a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n} = k \cdot a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n} \quad (6.4)$$

Am obținut relația matematică a mărimii fizice A , cu aproximația unei constante multiplicative: $k = \sum C_i$. Ea se determină numai pe cale experimentală.

Dacă sistemul este compatibil nedeterminat se stabilește determinantul principal al sistemului și de exprimă necunoscutele principale în funcție de cele secundare, deocamdată neprecizate. Se pot da în acest caz informații suplimentare privind independența unor monoame de anumite mărimi fizice. A impune independența unui

monom de o anumită mărime fizică a_i , înseamnă să impunem pentru exponentul acelei mărimi de valoarea zero.

Dacă sistemul este incompatibil, fie există o eroare în formarea sau rezolvarea sistemului de ecuații, fie în formularea greșită a problemei în sensul că nu au fost prezentate adevărate mărimi fizice de care depinde A . În acest caz se verifică calculele și se reformulează problema.

b) Metoda produselor (teorema π)

Când numărul mărimilor fizice a_1, a_2, \dots, a_n , depășește valoarea 6, se constată că metoda Reyleigh este laborioasă și se înlocuiește cu o metodă echivalentă, care se numește metoda produselor sau teorema produselor (π), care se enunță astfel: orice funcție omogenă dimensional, de n mărimi fizice, poate fi scrisă echivalent sub forma unei funcții implicite cu un număr mai mic de variabile adimensionale care reprezintă cazuri particulare ale unui monom de puteri al mărimilor fizice din fenomenul respectiv.

Considerăm că urmărim să determinăm relația care reprezintă dependența mărimii fizice A , funcție de mărimile fizice a_1, a_2, \dots, a_n .

Se poate demonstra că orice relație matematică omogenă dimensional, poate fi scrisă sub formă adimensională prin împărțirea la un termen al acestuia.

Procedând astfel obținem rapoarte de monoame care sunt cazuri particulare ale unui produs general sub forma:

$$\pi = a_1^{x_1} \cdot a_2^{x_2} \cdot \dots \cdot a_n^{x_n} \cdot A^{x_{n+1}} \quad (6.5)$$

Absența unei mărimi fizice din cadrul unui monom se justifică prin exponentul zero al acestei mărimi.

Exponenții $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ au astfel de valori încât produsul π să nu aibă dimensiune. Asta înseamnă că exponenții rezultanți ai tuturor unităților fundamentale de măsură din cadrul acestui produs să fie nuli.

Practic pentru a obține exponenții x_i vom înlocui mărimile fizice din produs prin dimensiunile lor și vom impune ca exponentul rezultat al fiecărei unități de măsură să fie nul.

Se obține astfel un sistem liniar și omogen în $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ și acest sistem va avea întotdeauna și soluții nenule, deoarece rangul sistemului este mai mic decât numărul ecuațiilor.

Se exprimă necunoscutele principale în funcție de cele secundare și apoi urmează scrierea soluțiilor fundamentale ale sistemului omogen, care se obțin dând pe rând unei necunoscute secundare valoarea 1 și celorlalte valoarea zero.

De fiecare dată putem forma un produs adimensional cu valorile rezultate pentru exponenții $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$. Numărul acestor produse va fi egal cu numărul necunoscutelor secundare, evident mai mic decât n .

Așadar, relația corectată se va exprima printr-un număr de produse adimensionale mai mic decât numărul mărimilor fizice din fenomenul respectiv.

Pentru aplicarea acestei teoreme se parcurg următoarele etape:

1) Se întocmește o matrice a dimensiunilor variabilelor în care se precizează pe verticală dimensiunea acelor mărimi fizice:

6.2. Noțiuni despre similitudine

Studiul unui fenomen fizic se poate face atât pe cale teoretică cât și pe cale experimentală, sau combinându-le pentru verificarea rezultatelor teoretice.

În cazul tratării pur teoretice a fenomenului, acesta poate fi încadrat într-o conexiune de fenomene cunoscute, pentru care se cunosc relațiile matematice dintre mărimile fizice respective.

Acest studiu presupune întocmirea unui model matematic și rezolvarea acestuia. Prin model matematic vom înțelege ansamblul de ecuații algebrice, diferențiale sau integro-diferențiale prin care se corelează mărimile fizice din fenomen.

Există situații când rezolvarea ansamblului de ecuații conduce la dificultăți matematice sau chiar la imposibilitatea tratării exacte a modelului. În asemenea cazuri se introduc ipoteze simplificatoare pentru obținerea unui model matematic ușor de tratat.

Pentru verificarea justetei ipotezelor utilizate, rezultatele teoretice obținute vor fi confruntate cu cele obținute pe cale experimentală.

Există și alte situații când datorită numărului mare de mărimi fizice și a unor corelații necunoscute între ele nu putem elabora un model matematic. În acest caz, fenomenul respectiv se tratează pur experimental, în laborator.

Dacă fenomenul se răsfrânge asupra unui obiect fizic, atunci se recurge la realizarea unui model al obiectului, micșorat sau mărit în raport cu dimensiunile obiectului real. În acest caz, transpunerea măsurătorilor obținute în laborator, la fenomenul din natură, se va face pe baza unor reguli precise, elaborate de teoria similitudinii.

Fenomenul din laborator este similar celui din natură, dacă pe lângă asemănarea geometrică dintre obiectul model și cel din natură (numit prototip), există și o similitudine cinematică și dinamică.

Două mărimi cinematice de același nume măsurate pe model și pe prototip, trebuie să se afle într-un raport constant, dacă sunt măsurate în puncte corespondente sau omoloage de pe model și de pe prototip oricare ar fi perechea de puncte omoloage. Acest raport constant se va numi scara mărimii cinematice respective.

Așadar putem vorbi de scara vitezelor $k_v = \frac{v_n}{v_m}$ sau scara accelerațiilor $k_a = \frac{a_n}{a_m}$,

unde am notat cu indice n mărimile din natură și cu m mărimile modelului.

Tot astfel mărimile dinamice din punctele omoloage se vor afla într-un raport constant numit scara acelei mărimi dinamice. De exemplu, scara forțelor $k_F = \frac{F_n}{F_m}$.

Prin puncte omoloage vom înțelege puncte cu dispoziție identică pe model și pe prototip.

O mulțime infinită de puncte omoloage determină curbe omoloage, suprafețe omoloage sau volume omoloage.

După cum mărimile fizice sunt mărimi fundamentale sau derivate tot astfel și scările lor sunt fundamentale sau derivate. De exemplu, scara lungimilor este o scară fundamentală $k_l = \lambda = \frac{l_n}{l_m}$, deoarece lungimea este o mărime fundamentală.

Scara a două suprafețe omoloage $k_A = \frac{A_n}{A_m} = \lambda^2$ este o scară derivată, deoarece ea se exprimă printr-o scară fundamentală. Putem demonstra că scara suprafețelor este pătratul scării lungimilor, considerând două suprafețe omoloage dreptunghiulare pe model și pe prototip, pentru care putem scrie:

$$\begin{aligned} A_n &= L_n B_n \\ A_m &= L_m B_m \end{aligned} \quad k_A = \frac{L_n}{L_m} \frac{B_n}{B_m} = \lambda^2 \quad (6.10)$$

Scara timpilor este și ea o scară fundamentală, $k_t = \frac{t_n}{t_m}$, la fel și scara masei

$$k_m = \frac{m_n}{m_m}.$$

Este evident că fenomenul din laborator este similar celui din natură, dacă el depinde de aceleași mărimi fizice, ceea ce atrage după sine obținerea prin teorema π a acelorași produse fundamentale $\pi_j (j=1, 2, \dots)$, adimensionale.

Ecuția implicită a produselor adimensionale

$$\varphi(\pi_1, \pi_2, \dots) = 0 \quad (6.11)$$

care rezultă din aplicarea teoremei π se numește ecuație criterială.

Așadar, fenomenele din natură și cele din laborator sunt similare, dacă au aceeași ecuație criterială. Mai mult se arată că produsele adimensionale π_1, π_2, \dots au aceeași valoare atât pe model cât și pe prototip cu condiția ca modelul să fie realizat la o singură scară geometrică. Din acest motiv produsele π_1, π_2, \dots , care sunt niște complecși adimensionali se mai numesc și invarianți.

Similitudinea dintre fenomenul din natură și cel din laborator se numește completă sau totală dacă toți complecșii adimensionali $\pi_j (j = 1, 2, \dots)$ au aceeași valoare pe model și pe prototip.

Există și situații când nu putem asigura egalitatea tuturor complecșilor adimensionali π_j pe model și pe prototip, ci numai a celor care includ mărimile fizice cu rol preponderent în fenomenul studiat. În asemenea cazuri spunem că am realizat o similitudine incompletă sau parțială.

În teoria similitudinii complecșii adimensionali se mai numesc și criterii de similitudine sau invarianți de similitudine. Criteriile de similitudine se notează de obicei cu primele două litere ale numelor oamenilor de știință care le-au studiat de exemplu: Re (Reynolds), Fr (Froude), Ma (Mach), etc.

Proprietatea fundamentală a criteriilor de similitudine este că ele păstrează aceleași valori numerice pe model și prototip în fenomene asemenea. Criteriile de similitudine pot fi stabilite pe căi diferite având la bază cunoașterea ecuației matematice a fenomenului respectiv.

O primă metodă de lucru are la bază principiul conform căruia ecuația pentru fenomenul din laborator nu se deosebește de ecuația fenomenului din natură decât prin faptul că mărimile fizice sunt multiplicare la scară astfel încât factorii de scară ce apar în ecuația fenomenului model să se simplifice, regăsind ecuația fenomenului din natură sau invers.

O altă metodă de lucru are la bază rezultate din analiza dimensională considerând mărimile fizice care intervin preponderent în evoluția fenomenului considerat.

Vom prezenta în continuare prima metodă de obținere a criteriilor de similitudine.

Considerând mișcarea laminară a unui fluid vâscos, care este descrisă de ecuația lui Navier-Stokes:

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (6.11)$$

Putem scrie această ecuație pentru fenomenul din natură (indice n), cât și pentru fenomenul de pe model, obținând ecuații similare:

$$X_n - \frac{1}{\rho_n} \frac{\partial p_n}{\partial x_n} + \nu_n \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_n^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial y_n^2} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial z_n^2} \right) = \frac{\partial u_n}{\partial t_n} + u_n \frac{\partial u_n}{\partial x_n} + v_n \frac{\partial u_n}{\partial y_n} + w_n \frac{\partial u_n}{\partial z_n} \quad (6.12)$$

$$X_m - \frac{1}{\rho_m} \frac{\partial p_m}{\partial x_m} + \nu_m \left(\frac{\partial^2 u_m}{\partial x_m^2} + \frac{\partial^2 u_m}{\partial y_m^2} + \frac{\partial^2 u_m}{\partial z_m^2} \right) = \frac{\partial u_m}{\partial t_m} + u_m \frac{\partial u_m}{\partial x_m} + v_m \frac{\partial u_m}{\partial y_m} + w_m \frac{\partial u_m}{\partial z_m}$$

În continuare vom folosi următoarele scări ale mărimilor fizice:

$$k_X = k_g = \frac{X_n}{X_m}; \quad k_\rho = \frac{\rho_n}{\rho_m}; \quad k_X = \frac{P_n}{P_m}; \quad k_l = \frac{X_n}{X_m} = \frac{Y_n}{Y_m} = \frac{Z_n}{Z_m}; \quad (6.13)$$

$$k_v = \frac{X_n}{X_m}; \quad k_v = \frac{v_n}{v_m} = \frac{u_n}{u_m} = \frac{w_n}{w_m}; \quad k_t = \frac{t_n}{t_m}$$

Vom exprima prin aceste scări mărimile fizice însoțite de indicele n , care caracterizează fenomenul din natură. Înlocuind aceste mărimi în ecuația Navier-Stokes corespunzătoare fenomenului din natură, obținem:

$$k_X X_m - \frac{k_p}{k_\rho k_l} \frac{\partial p_m}{\rho_m \partial x_m} + k_v \nu_m \frac{k_v}{k_l^2} \left(\frac{\partial^2 u_m}{\partial x_m^2} + \frac{\partial^2 u_m}{\partial y_m^2} + \frac{\partial^2 u_m}{\partial z_m^2} \right) =$$

$$\frac{k_v}{k_t} \frac{\partial u_m}{\partial t_m} + \frac{k_v}{k_l} \left(u_m \frac{\partial u_m}{\partial x_m} + v_m \frac{\partial u_m}{\partial y_m} + w_m \frac{\partial u_m}{\partial z_m} \right) \quad (6.14)$$

Această relație va fi identică cu ecuația Navier-Stokes a fenomenului de pe model dacă factorii de scară se pot elimina prin simplificare, adică să avem egalitățile:

$$k_X = \frac{k_p}{k_\rho k_l} = \frac{k_v k_v}{k_l^2} = \frac{k_v}{k_t} = \frac{k_v^2}{k_l} \quad (6.15)$$

Egalând succesiv ultimul raport cu celelalte și înlocuind scările mărimilor fizice vom obține criteriile de similitudine specifice mișcării fluidelor vâscoase.

Egalând primul raport cu ultimul obținem:

$$k_g = \frac{k_v^2}{k_l} \quad (6.16)$$

și utilizând scările mărimilor fizice care intervin, rezultă:

$$\frac{v_n^2}{g_n l_n} = \frac{v_m^2}{g_m l_m} \quad (6.17)$$

$$\text{Raportul de forma } \frac{v^2}{gl} = Fr \quad (6.18)$$

este criteriul de similitudine Froude. Criteriul este folosit în fenomene în care intervine gravitația, sub forma:

$$Fr_n = Fr_m \quad (6.19)$$

Egalând al doilea raport cu ultimul, obținem:

$$\frac{k_p}{k_\rho k_l} = \frac{k_v^2}{k_l}, \text{ sau } \frac{k_p}{k_\rho k_v^2} = 1 \quad (6.20)$$

După înlocuirea scărilor, rezultă:

$$\frac{P_n}{\rho_n v_n^2} = \frac{P_m}{\rho_m v_m^2} \quad (6.21)$$

$$\text{Raportul de forma } \frac{P}{\rho v^2} = Eu \quad (6.22)$$

este criteriul de similitudine Euler. Criteriul intervine în fenomene de curgere ale fluidelor sub presiune; așadar în modelarea acestor fenomene va trebui să existe egalitatea:

$$Eu_n = Eu_m. \quad (6.23)$$

Egalând al treilea raport cu ultimul, obținem:

$$\frac{k_v k_v}{k_l^2} = \frac{k_v^2}{k_l} \quad (6.24)$$

$$\text{de unde: } \frac{k_v k_l}{k_v} = 1 \quad (6.25)$$

sau după înlocuirea relațiilor care definesc scăările, rezultă:

$$\frac{v_n \cdot l_n}{v_n} = \frac{v_m \cdot l_m}{v_m} \quad (6.26)$$

$$\text{Raportul de forma } \frac{v \cdot l}{v} = Re \quad (6.27)$$

este criteriul de similitudine Reynolds. Criteriul intervine în studiul fenomenelor de curgere ale fluidelor puternic vâscoase. Pentru asemenea fenomene va trebui să existe relația:

$$Re_n = Re_m \quad (6.28)$$

Trebuie să precizăm că în expresia numărului lui Reynolds, l reprezintă o lungime caracteristică a curentului de fluid; în cazul curgerii printr-o conductă circulară, l va fi diametrul conductei.

Egalând ultimele două rapoarte, obținem:

$$\frac{k_v}{k_l} = \frac{k_v^2}{k_l} \quad (6.29)$$

$$\text{de unde: } \frac{k_v k_l}{k_l} = 1 \quad (6.30)$$

După înlocuirea scărilor rezultă:

$$\frac{v_n t_n}{l_n} = \frac{v_m t_m}{l_m} \quad (6.31)$$

Raportul adimensional de forma:

$$\frac{v \cdot t}{l} = Sh \quad (6.32)$$

este criteriul de similitudine Strouhal. Un asemenea criteriu intervine în studiul fenomenelor variabile în timp (regimul tranzitoriu de funcționare a unei instalații hidraulice realizat la pornirea sau oprirea acestuia sau în cazul fenomenelor periodice). Pentru asemenea fenomene va trebui să existe egalitatea

$$\text{Sh}_n = \text{Sh}_m. \quad (6.33)$$

Dacă fenomenul este periodic, numărul lui Strouhal apare sub forma:

$$\text{Sh} = \frac{vT}{l} = \frac{v}{l \cdot f} \quad (6.34)$$

unde frecvența este de forma:

$$f = \frac{1}{T} \quad (6.35)$$

7. NOȚIUNI DE TEORIA HIDRODINAMICĂ A LUBRIFICAȚIEI

Pentru asigurarea unei bune lubrificații între două suprafețe solide aflate în mișcare relativă și supuse unor forțe exterioare este necesar ca între aceste suprafețe solide să existe o peliculă de lubrifianț care are grosimi de ordinul zecimilor de milimetru. De regulă, pelicula de lubrifianț este lichidă, dar se pot utiliza și gaze sau materiale solide.

Rolul lubrifianțului este complex: reduce frecările dintre suprafețele în mișcare, contribuie la disiparea căldurii produse prin frecare și asigură etanșeitatea. Din cauza grosimii mici a peliculei de lubrifianț forțele de greutate și de inerție din peliculă sunt neglijabile în raport cu forțele de presiune și cele de viscozitate.

Tratarea teoretică are la bază sistemul de ecuații Navier-Stokes, care se simplifică mult prin neglijarea forțelor de greutate și de inerție.

a) Considerăm pentru început cazul unei perechi de suprafețe plane, lubrificate cu lichid, placa superioară fiind fixă, iar placa inferioară mișcându-se cu viteza constantă v_0 pe direcția Ox , figura 39, spațiul dintre plăci având aceeași grosime $z = h = Ct$.

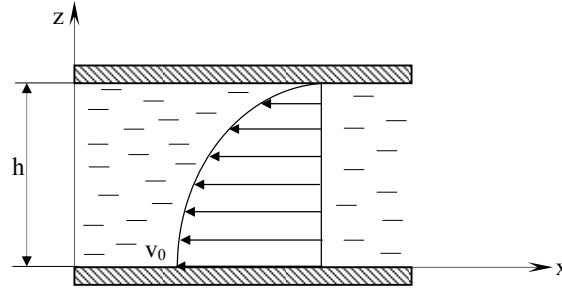


Fig. 39. Peliculă de lubrifianț între două plăci

Considerăm că mișcarea este plană (în planul xOy), deci $p = p(x,y)$ iar viteza variază în mod preponderent pe direcția z . Sistemul de ecuații de mișcare Navier-Stokes devine:

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases} \quad (7.1)$$

Integrăm prima ecuație și obținem:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} z + C_1 \Rightarrow u = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{z^2}{2\eta} + C_1 z + C_2 \quad (7.2)$$

Constantele de integrare se determină din condițiile la limită:

$$\begin{cases} \text{pentru } z = 0 & \Rightarrow u = -v_0 \\ \text{pentru } z = h & \Rightarrow u = 0 \end{cases} \quad (7.3)$$

$$\text{Rezultă: } C_2 = -v_0 \quad \text{și} \quad C_1 = -\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} h + \frac{v_0}{h} \quad (7.4)$$

Componenta vitezei după direcția x , devine:

$$u = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (z^2 - zh) - v_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right) \quad (7.5)$$

Debitul pentru o suprafață de înălțime h și de lățime egală cu unitatea este:

$$Q_x = \int_0^h u \, dz = \int_0^h \left[\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (z^2 - zh) - v_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right) \right] dz$$

de unde:
$$Q_x = -\frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{v_0 h}{2} \quad (7.6)$$

În cazul când lichidul se mișcă simultan și după direcția Oy , integrăm și obținem a doua ecuație din sistemul (8.1), prin calcule similare:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial y} z + C_1'; \quad v = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial y} z^2 + C_1' z + C_2' \quad (7.7)$$

Condițiile la limită pentru determinarea constantelor sunt:

$$\begin{cases} \text{pentru } z = 0 & \Rightarrow v = 0 \\ \text{pentru } z = h & \Rightarrow v = 0 \end{cases} \quad (7.8)$$

de unde:
$$C_2' = 0 \quad \text{și} \quad C_1' = -\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial y} h \quad (7.9)$$

Rezultă:
$$v = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial y} (z^2 - zh) \quad (7.10)$$

și debitul după direcția Oy :

$$Q_y = \int_0^h \left[\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial y} (z^2 - zh) \right] dz = -\frac{h^3}{12\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (7.11)$$

Putem scrie ecuația de continuitate pentru paralelipipedul de dimensiuni $dx \times dy \times 1$, parcurs de fluid în direcțiile x și y , figura 40.

$$Q_x \, dy + Q_y \, dx = \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx$$

sau:
$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0$$

Înlocuim expresiile celor două debite Q_x și Q_y , obținem:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial x} h^3 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial y} h^3 \right) = 6\eta \cdot v_0 \frac{\partial h}{\partial x} \quad (7.12)$$

Relația (7.12) este cunoscută și sub denumirea de ecuația lui Reynolds pentru lagărele de lungime finită. Dacă funcția $h(x,y)$ este complet determinată ecuația lui Reynolds permite calculul presiunii $p(x,y)$.

Lagărul va suporta sarcina exterioară, dacă presiunea din interiorul peliculei de lichid, dezvoltă o forță care să o echilibreze.

Analizând relația care exprimă variația presiunii pe direcția Ox , dedusă din ecuația (7.6) și anume:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{12gh}{h^3} \left(Q_x + \frac{v_0 h}{2} \right) \quad (7.13)$$

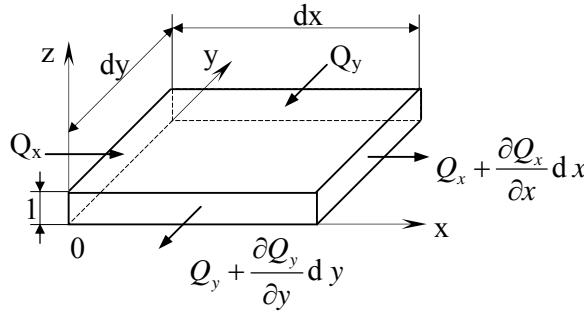


Fig. 40. Paralelipiped elementar de lubrifiant

Constatăm că în cazul în care $Q_x = Ct.$, $v_0 = Ct.$, $h = Ct.$, rezultă că $\frac{\partial p}{\partial x}$ este constant,

adică presiunea din pelicula de ulei nu poate depăși valoarea presiunii atmosferice care se găsește la capetele lagărului de lungime finită. În consecință un asemenea lagăr nu poate crea portanță.

b) Să considerăm acum cazul în care suprafețele care alcătuiesc lagărul sunt înclinate cu unghiul α , pelicula de lubrifiant având formă de pană a cărei grosime se micșorează de la cota z_1 la z_2 , figura 41.

Presiunea din interiorul stratului de ulei se va putea calcula cu relația (8.13), scrisă sub forma:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -12\eta \frac{Q_x}{z^3} - 6\eta \frac{v_0}{z^2}$$

sau:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{6\eta v_0}{(z_1 - \alpha x)^2} - \frac{12\eta Q_x}{(z_1 - \alpha x)^3} \quad (7.14)$$

După integrarea relației (8.14) obținem:

$$p = -\frac{6\eta v_0}{\alpha(z_1 - \alpha x)} + \frac{12\eta Q_x}{2\alpha(z_1 - \alpha x)^2} + C \quad (7.15)$$

Din condițiile la limită $x = 0$, $p = p_0$, rezultă:

$$C = p_0 + \frac{6\eta \cdot v_0}{\alpha \cdot z_1} - \frac{6\eta \cdot Q_x}{\alpha \cdot z_1^2} \quad (7.16)$$

Condițiile la limită pentru limita din dreapta a lagărului sunt $x = l$, $p = p_0$, de unde rezultă:

$$0 = \frac{6\eta \cdot v_0}{\alpha} \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_1 - \alpha x} \right) - \frac{6\eta \cdot Q_x}{\alpha} \left[\frac{1}{z_1} - \frac{1}{(z_1 - \alpha x)^2} \right]$$

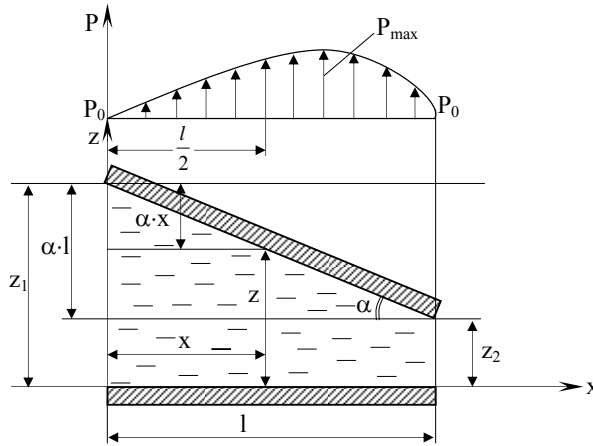


Fig. 41. Lubrifiant între două plăci plane înclinate

sau înlocuind pe $z_1 - \alpha \cdot l$ cu z_2 , rezultă:

$$Q_x = -v_0 \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2} \quad (7.18)$$

și:

$$p = p_0 + \frac{6\eta v_0 (l-x)(z_1 - z_2)}{l z^2 (z_1 + z_2)} \quad (7.19)$$

relație care ne dă valoarea presiunii în interiorul peliculei de ulei la distanța x de origine. Reprezentarea grafică a variației de presiune, figura 41, arată o dependență aproape parabolică presiunea maximă fiind deplasată față de $\frac{l}{2}$ în sensul mișcării.

Portanța sau sarcina pe care o poate suporta un astfel de lagăr se poate calcula efectuând integrala $\int_0^l (p - p_0) dx$. Utilizând relația (8.19) obținem:

$$P = \int_{x=0}^{x=l} (p - p_0) dx = \frac{6\eta \cdot v_0 (z_1 - z_2)}{l(z_1 + z_2)} \int_0^l \frac{(l-x)x}{z^2} dx \quad (7.20)$$

Ținând cont că $z = z_1 - \alpha \cdot x$ și $z_2 = z_1 - \alpha \cdot l$, rezultă:

$$\frac{(l-x)x}{z^2} dx = \frac{(z - z_2)(z_1 - z)}{\alpha^2 z^2} \frac{dz}{\alpha}$$

Efectuăm integrala și obținem:

$$P = \frac{6\eta v_0 l^2}{z_2^2 (c-1)^2} \left(\ln c - 2 \frac{c-1}{c+1} \right) \quad (7.21)$$

unde am utilizat notația $c = \frac{z_1}{z_2}$.

În cazul lagărelor cilindrice, teoria precedentă poate fi în primă aproximație aplicată deoarece grosimea particulei de lubrifiant este foarte mică în raport cu axa de curbura a cuzinetului, acesta putându-se aproxima pe o zonă relativ restrânsă cu o suprafață plană.

8. TEORIA STRATULUI LIMITĂ

Numim strat limită, stratul de fluid în mișcare din imediata vecinătate a unui corp, în care viteza variază de la valoarea zero la suprafața corpului, până la valoarea corespunzătoare curgerii exterioare a fluidului și în care se manifestă intens acțiunea forțelor de frecare.

Considerăm pentru exemplificare, curgerea unui fluid vâscos în lungul unei plăci plane subțiri așezată paralel cu direcția de curgere, figura 42, unde am notat u_∞ viteza curgerii exterioare și δ grosimea stratului limită.

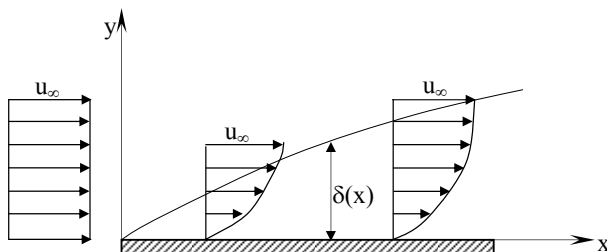


Fig. 42. Stratul limită în lungul unei plăci plane

Grosimea stratului limită nu poate fi precizată în mod riguros, deoarece trecerea de la viteza din stratul limită la viteza curgerii exterioare se face asimptotic. Grosimea stratului limită crește treptat odată cu numărul lui Reynolds.

Tensiunea tangențială de frecare $\tau = \eta \frac{du}{dy}$, în interiorul stratului limită, atinge

valori foarte mari chiar pentru fluide cu vâscozitate foarte mică, deoarece gradientul vitezei în direcția normală pe suprafață este foarte mare. De aceea în studiul teoretic al curgerii unui fluid cu vâscozitate mică, se separă câmpul de curgere în două domenii: stratul limită în care se consideră forțele de vâscozitate și domeniul din exteriorul acestui strat unde forțele de vâscozitate se pot neglija.

Această separare aproximativă a câmpului de curgere în două domenii, introdusă de Prandtl, simplifică studiul teoretic al fluidelor reale.

Grosimea stratului de fluid depinde de regimul de mișcare a fluidului în stratul limită, care poate fi laminar, de tranziție și turbulent. Regimul de mișcare depinde de numărul lui Reynolds, determinat cu u_∞ și cu lungimea caracteristică x , măsurată de la capătul corpului (bordul de atac).

Regimul de mișcare este laminar pentru distanțe x mici, deci în apropierea bordului de atac, trece apoi în regim tranzitoriu pentru o valoare critică x_{cr1} (Re_{cr1}) și apoi în regim turbulent pentru valori mai mari de x_{cr2} (Re_{cr2}). Valorile critice ale numărului lui Reynolds depind de forma conturului corpului. În afară de numărul lui Reynolds, asupra regimului de mișcare din stratul limită, mai influențează gradul de turbulență a curentului exterior, rugozitatea peretelui în special în zona bordului de atac și modul de variație a presiunii pe direcția mișcării. Pentru placa plană considerată, grosimea stratului limită funcție de regimul de curgere este reprezentată în figura 43.

Grosimea stratului turbulent nu se poate determina pe cale analitică, datorită complexității fenomenului de frecare din această zonă; în acest caz se utilizează o relație determinată pe cale experimentală:

$$\delta = 0,37 \frac{x}{\sqrt[5]{\text{Re}_x}} \quad (8.1)$$

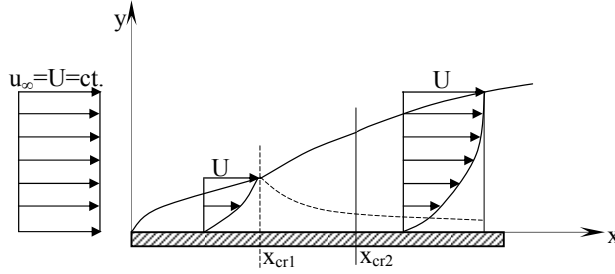


Fig. 43 Stratul limită și regimurile de mișcare

În zona stratului limită turbulent, putem observa crearea unui substrat laminar de grosime foarte mică.

8.1. Ecuațiile de mișcare ale stratului limită

Mișcarea într-un strat bidimensional incompresibil, este descrisă de ecuațiile lui Prandtl, care se obțin din simplificarea ecuațiilor de mișcare Navier-Stokes, aplicate stratului limită. Datorită grosimii foarte mici, putem neglija forțele masice, sistemul de ecuații Navier-Stokes, devenind:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (8.2)$$

La ecuațiile Navier-Stokes am adăugat și ecuația continuității.

Pentru simplificarea acestor ecuații în vederea determinării ecuațiilor lui Prandtl, facem ipoteza că grosimea stratului limită este foarte mică în raport cu o lungime caracteristică a corpului în jurul căruia are loc curgerea. Deci: $\delta \ll L$.

În raport cu această ipoteză Prandtl a făcut aprecieri asupra ordinului de mărime al termenilor din ecuațiile Navier-Stokes.

Deplasarea după direcția axei Ox , care este orientată în lungul corpului, are același ordin de mărime ca și lungimea caracteristică L : $x \sim L$.

Ordonata y , care ia valori între 0 și δ , are același ordin de mărime cu δ : $y \sim \delta$.

Componenta vitezei după direcția Ox , ia valori între 0 și u_∞ (pe care o notăm cu U), deci u are ordinul de mărime al vitezei U , corespunzătoare curgerii exterioare:
 $u \sim U$.

Derivatele parțiale ale componentei u a vitezei, vor avea următoarele ordine de mărime:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{U}{L}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \sim \frac{U}{L^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{U}{\delta}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \frac{U}{\delta^2};$$

Din ecuația continuității, rezultă că $\frac{\partial v}{\partial y}$ are același ordin de mărime cu $\frac{\partial u}{\partial x}$:

$$\frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{U}{L}$$

Exprimăm viteza v funcție de $\frac{\partial v}{\partial y}$: $v = \int_0^y \frac{dv}{dy} dy$, deci ordinul de mărime al componentei v a vitezei este: $v \sim \frac{U}{L} \delta$.

Pentru derivatele parțiale ale vitezei v , rezultă:

$$\frac{\partial v}{\partial x} \sim \frac{U\delta}{L^2}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{U}{L}; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \sim \frac{U\delta}{L^3}; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sim \frac{U}{L\delta};$$

Facem ipoteza că accelerația locală $\frac{\partial u}{\partial t}$ are același ordin de mărime cu accelerația convectivă, deci: $\frac{\partial u}{\partial t} \sim \frac{U^2}{L}$ deci se exclude apariția unei accelerații instantanee mari.

Analizând termenul $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$, unde p poate fi înlocuită cu ρu^2 , deducem că are ordinul de mărime al accelerației convective: $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \sim \frac{U^2}{L}$

Scriem din nou prima ecuație din sistemul de ecuații Navier-Stokes pentru a compara ordinele de mărime ale termenilor care intervin:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{U^2}{L} \quad \frac{U^2}{L} \quad \frac{U^2}{L} \quad \frac{U^2}{L} \quad \nu \frac{U}{L^2} \quad \nu \frac{U}{\delta^2}$$

În această ecuație se poate neglija termenul în raport cu $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, deoarece raportând ordinele lor de mărime obținem: $\frac{U}{L^2} : \frac{U}{\delta^2} = \left(\frac{\delta}{L} \right)^2$

care este pătratul unei mărimi foarte mici.

Deoarece în interiorul stratului limită, forțele de viscozitate au același ordin de mărime cu forțele de inerție, conform ipotezei lui Prandtl, rezultă:

$$\frac{U^2}{L} = \nu \frac{U}{\delta^2}$$

de unde ordinul de mărime al viscozității cinematice este: $\nu \sim \frac{U\delta^2}{L}$

Comparăm și ordinele de mărime ale termenilor ecuației a doua din sistemul Navier-Stokes:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

$$\frac{U^2 \delta}{L^2} \quad \frac{U^2 \delta}{L^2} \quad \frac{U^2 \delta}{L^2} \quad \nu \frac{U \delta}{L^3} \quad \nu \frac{U}{L \delta}$$

Constatăm că în această ecuație se poate neglija termenul $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, în raport cu $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ deoarece raportul ordinilor de mărime este foarte mic:

$$\frac{U \delta}{L^3}; \frac{U}{L \delta} = \left(\frac{\delta}{L} \right)^2$$

Ca și la prima ecuație, considerăm că ordinul de mărime al termenului $\frac{\partial v}{\partial t}$ este același cu al termenilor accelerației convective: $\frac{\partial v}{\partial t} \sim \frac{U^2 \delta}{L^2}$

Ținând cont de ordinul de mărime a viscozității cinematice $\nu \sim \frac{U \delta^2}{L}$, rezultă că ordinul de mărime a termenului $\nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ este același cu cel al accelerației convective

$\frac{U^2 \delta}{L^2}$, adică este proporțional cu δ și este foarte mic. În aceste condiții, ecuația a doua se reduce la $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$, adică, variația presiunii după direcția normalei poate fi neglijată.

Pentru verificare, putem raporta ordinele de mărime a termenilor care conțin gradientele de presiune după direcțiile Oy și Ox și obținem:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} : \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \Rightarrow \frac{U^2 \delta}{L^2} : \frac{U^2}{L} = \frac{\delta}{L}$$

deci $\frac{\partial p}{\partial y}$ este foarte mic în raport cu $\frac{\partial p}{\partial x}$.

În concluzie, din cele trei ecuații ale sistemului Navier-Stokes, rămân două:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (8.3)$$

Sistemul (9.3) reprezintă ecuațiile de mișcare ale stratului limită bidimensional nepermanent, cunoscute sub numele de ecuațiile lui Prandtl.

8.2. Desprinderea stratului limită

În cazul plăcii plane considerate, pe frontiera stratului limită $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, ceea ce rezultă imediat scriind relația lui Bernoulli pe o linie de curent $p + \rho \frac{U_\infty^2}{2} = Ct.$, sau:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \rho \cdot u_\infty \frac{\partial u_\infty}{\partial x} = 0$$

Deoarece știm că pe frontiera stratului limită $\frac{\partial u_\infty}{\partial x} = 0$, rezultă: $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$.

În cazul corpurilor cu curbură, vitezele se modifică în raport cu forma corpului (datorită pierderilor energetice prin frecare, ținând seama de forțele de viscozitate care intervin în stratul limită). Rezultă că pe frontiera corpului (conform relației lui Bernoulli), $\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{y=0} \neq 0$. În cazul când vitezele din curentul exterior cresc datorită

condițiilor de mișcare, $\frac{\partial p}{\partial x} < 0$, iar dacă scad $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$.

Datorită faptului că presiunea de la frontiera stratului limită rămâne aceeași în lungul normalei $\left(\frac{\partial p}{\partial y} = 0\right)$, este posibil ca într-un anumit punct de pe suprafața corpului să avem îndeplinită condiția $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, figura 44.

Se observă existența unui punct de desprindere, unde $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ sau $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. La stânga acestui punct, mișcarea în stratul limită se realizează în sensul curgerii exterioare,

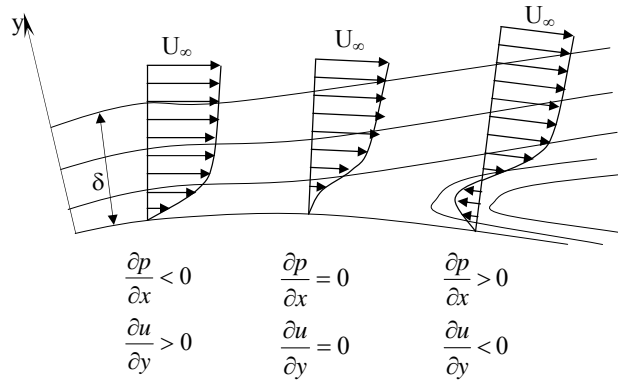


Fig. 44. Desprinderea stratului limită

iar la dreapta acestuia în sens opus. Zona în care mișcarea începe în sens invers, continuă în spatele corpului cu o succesiune de vârtejuri în funcție de numărul Re al mișcării. Pentru explicarea fenomenului de desprindere a stratului limită, considerăm curgerea unui fluid în jurul unui cilindru circular, figura 45.

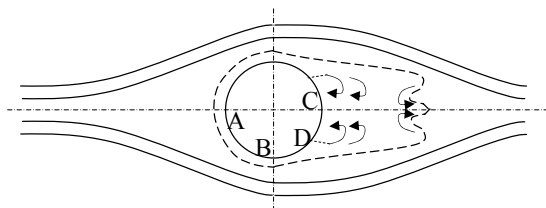


Fig. 45 Curgerea în jurul unui cilindru

Curgerea se poate împărți în două domenii, domeniul stratului limită și domeniul curgerii exterioare acestui strat.

În domeniul curgerii exterioare liniile de curent sunt simetrice și dacă vitezele cresc în zona bordului de atac (jumătatea din față a cilindrului în sensul mișcării fluidului), de la A la B , ele descresc în zona aval a cilindrului, de la B la C , având aceeași valoare în puncte simetrice față de diametrul vertical.

La analiza mișcării unei particule din stratul limită, trebuie să luăm în considerație și forțele de viscozitate, pe care în celălalt domeniu le putem neglija, astfel că în zona de la A la B , o parte a energiei cinetice este disipată.

Energia rămasă nu mai este suficientă pentru ca în zona de la B la C , unde presiunea crește și viteza scade, particula fluidă să atingă punctul C , viteza ei anulându-se în punctul intermediar D .

Aici este împinsă de către particulele din stratul limită din amonte, în afară, iar sub acțiunea particulelor din curentul exterior este împinsă înapoi, dând naștere unui vârtej. Se creează astfel două vârtejuri simetrice, care la valori mari ale numărului Re se alungesc și încep să oscileze. Se formează două șiruri de vârtejuri care au sensuri de rotație contrare, zona numindu-se “aleea de vârtejuri Kármán”.

În zona cu vârtejuri din aval, presiunea este sensibil mai mică decât în amonte, aceasta fiind cauza rezistenței de presiune, care apare.

Adunăm la această rezistență de presiune și rezistența de frecare în direcția de curgere și determinăm rezistența la înaintare, forță ce trebuie învinsă pe direcția de mișcare la deplasarea în fluid a unui corp oarecare.

9. MIȘCAREA TURBULENTĂ A FLUIDELOR REALE

9.1. Structura mișcării turbulente

Mișcarea turbulentă se caracterizează prin supunerea peste mișcarea principală, în direcția de curgere, a unei mișcări de agitație a particulelor de fluid, deosebit de complexă. Mișcarea de agitație are loc la nivelul macroscopic, al particulelor și a grupurilor de particule.

În mișcarea turbulentă liniile de curent nu sunt paralele între ele în direcția curgerii, ci se încrucișează, iar în masa fluidului apar vârtejuri dispuse în mod dezordonat. Viteza de mișcare turbulentă prezintă o tendință de a defini o valoare medie și o oscilație permanentă în jurul acestei valori medii, figura 46.

În mișcarea turbulentă apar eforturi de frecare suplimentare, care se manifestă prin pierderi mari de energie în lungul curentului de fluid. Pentru descrierea matematică a mișcării turbulente, aceasta se descompune într-o mișcare medie, care este caracterizată de $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, valorile medii ale componentelor vitezei într-un punct raportat la un sistem triortogonal $Oxyz$ și o mișcare de pulsație.

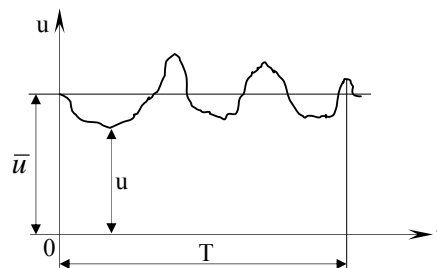


Fig. 46 Structura mișcării turbulente

Viteza instantanee a punctului va avea componentele:

$$u = \bar{u} + u'; \quad v = \bar{v} + v'; \quad w = \bar{w} + w' \quad (9.1)$$

Valoarea medie \bar{u} se calculează ca viteză medie temporară, cu relația:

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u \, dt \quad (9.2)$$

unde intervalul de timp T , trebuie să fie suficient de mare pentru ca valoarea medie calculată să nu depindă de timp. Putem demonstra ușor că valorile medii ale mărimilor pulsatorii sunt nule:

$$\bar{u}' = \frac{1}{T} \int_0^T u' \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T (u - \bar{u}) \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T u \, dt - \frac{1}{T} \int_0^T \bar{u} \, dt = \bar{u} - \bar{u} = 0 \quad (9.3)$$

Aprecierile făcute pentru componentele u sunt valabile și pentru v și w , respectiv pentru v' și w' .

Putem concluziona că mișcarea turbulentă este pentru un punct din câmpul curentului nepermanentă, însă în ansamblul ei poate fi considerată permanentă (având o rezultantă unidirecțională). Pentru aceasta în calcule trebuie să luăm vitezele medii pentru durate de timp suficient de mari (în măsurătorile practice cu sonde tip Pitot-Prandtl, se măsoară valori medii ale curentului).

9.2. Tensiunea tangențială în mișcarea turbulentă

La mișcarea turbulentă, datorită pulsației vitezei între straturile de fluid învecinate are loc un schimb neîntrerupt de particule, deci de masă. Considerăm o mișcare

turbulentă plană și două straturi apropiate A și B cu vitezele \bar{u} și $\bar{u} + d\bar{u}$, în sensul curgerii. La limita dintre cele două straturi, considerăm un element de suprafață dS , figura 47.

Datorită componenteii v' , prin dS în intervalul de timp dt , va trece masa elementară $dm = \rho |v'| dS dt$, din stratul B în stratul A , care contribuie la modificarea impulsului lichidului din stratul A .

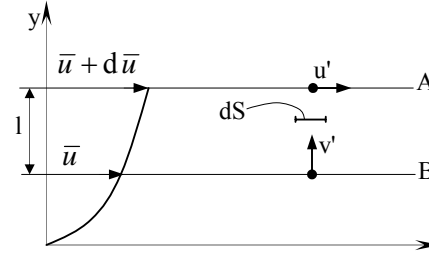


Fig. 47 Schimbul de masă între straturile de fluid

Variația în direcția de mișcare Ox a impulsului acestei mase elementare, sub acțiunea componenteii u' a vitezei de pulsație, va fi:

$$dm \cdot u' = \rho |v'| \cdot u' dS dt \quad (9.4)$$

Conform teoremei variației impulsului, variația impulsului în timp este egală cu forța ce acționează în direcția respectivă, deci:

$$F = u' \cdot \rho |v'| \cdot dS \quad (9.5)$$

$$\text{de unde: } \tau_{t_0} = -\rho \cdot u' \cdot v' \quad (9.6)$$

Semnul minus, arată că o dilatare în direcția Ox corespunzătoare unei viteze u' pozitive, necesită a contractare în sensul lui Oy ($v' < 0$), deoarece masa totală nu variază. Tensiunea unitară dată de relația (9.6) se numește tensiune tangențială de amestec și reprezintă forța unitară care realizează transferul de impuls în mișcarea turbulentă. Valoarea medie a acesteia într-un interval de timp T , considerând densitatea constantă în timp, va fi:

$$\tau_t = \frac{1}{T} \int_0^T \tau_{t_0} dt = -\frac{\rho}{T} \int_0^T \overline{u'v'} dt$$

sau: $\tau_t = -\rho \cdot \overline{u'v'}$ (9.7)

unde $\overline{u'v'}$, este media produsului pulsațiilor. Tensiunea unitară este dată de relația (9.7) se numește tensiune unitară turbulentă sau aparentă și a fost definită de Reynolds.

Pentru această tensiune unitară de amestec Prandtl a propus o metodă de calcul pe baza teoriei "lungimii de amestec". Deoarece masa de fluid rămâne constantă și fluidul este continuu și deformabil, o modificare a impulsului pe una din direcții atrage modificări echivalente pe alte direcții. În cazul considerat, al mișcării plane, impulsul pe o direcție, cauzat de pulsația vitezei este egal cu impulsul pe cealaltă direcție, adică:

$$u' dm = v' dm$$

Particula fluidă, care datorită vitezei v' ajunge în stratul A , capătă viteza acestui strat $\bar{u} + d\bar{u}$. Rezultă, că se poate defini o lungime l , lungimea de amestec, care să satisfacă proporționalitatea:

$$\frac{u'}{l} = \frac{du}{dy} \quad (9.8)$$

Lungimea de amestec l , reprezintă distanța pe care o parcurge o particulă în sens transversal sub acțiunea pulsației. După această distanță l , efectul pulsațiilor încetând, ea se amestecă cu particulele din stratul în care a pătruns.

$$\text{Rezultă: } u' = l \frac{du}{dy} \quad (9.9)$$

și în ipoteza că v' și u' diferă printr-un coeficient α , $v' = \alpha u'$, putem scrie:

$$\overline{u'v'} = -\alpha \cdot l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \quad (9.10)$$

Deoarece coeficientul α se poate regăsi în valoarea lungimii de amestec l , putem scrie:

$$\tau_t = \rho \cdot l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \quad (9.11)$$

În privința lungimii de amestec există două ipoteze: Prandtl apreciază că în apropierea unui perete, $l = (0,4 \dots 0,435) \cdot y$, iar Karman, definește lungimea de amestec sub forma:

$$l = \left| \frac{\frac{d\bar{u}}{dy}}{\frac{d^2\bar{u}}{dy^2}} \right| \cdot 0,38 \quad (9.12)$$

În mișcarea turbulentă, acționează atât tensiunile tangențiale de viscozitate, cât și cele de amestec, tensiunea tangențială va fi:

$$\tau = -\eta \frac{du}{dy} - \rho \cdot l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 \quad (9.13)$$

O altă teorie semiempirică este teoria coeficientului de viscozitate turbulentă a lui Boussinesq, care a introdus acest coeficient prin relația:

$$-\rho \cdot \overline{u'v'} = \varepsilon \frac{d\bar{u}}{dy} \quad (9.14)$$

și rezultă că expresia tensiunii unitare tangențiale este:

$$\tau = (\eta + \varepsilon) \frac{d\bar{u}}{dy}$$

În apropierea peretelui solid pe lângă care are loc curgerea, componentele vitezei de pulsație devin din ce în ce mai mici și în această zonă rămâne un strat de fluid de grosime mică cu proprietăți ale curgerii laminare, numit strat limită laminar.

Acest strat prezintă o mare însemnătate, în legătură cu rezistența la înaintare a corpului în fluid.

9.3. Distribuția vitezelor în mișcarea turbulentă

Considerăm o conductă în care mișcarea este turbulentă. Față de diagrama repartiției vitezelor în mișcarea laminară, curba care reprezintă variația vitezelor în regim de curgere turbulent este mult mai aplatizată, figura 48, a și b.

În apropierea peretelui conductei, particulele fluide au posibilități reduse de deplasări transversale (v' este foarte mic sau este nul), iar cu peretele nu are loc un schimb de impuls, deci vitezele nu se pot uniformiza și cresc rapid într-un strat de grosime mică δ . După acest strat, datorită amestecului pronunțat, vitezele se uniformizează, având o creștere mică către maximumul din axa conductei. Odată cu creșterea numărului Re , trecerea particulelor dintr-un strat în altul este mai intensă și curba vitezelor mai aplatizată.

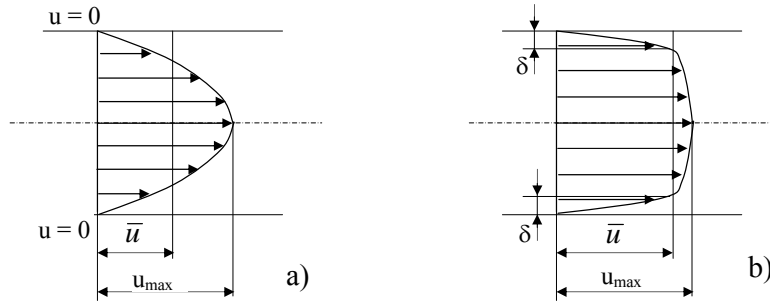


Fig. 48. Distribuția de viteze în mișcarea fluidelor reale

- a. mișcare laminară;
b. mișcare turbulentă.

Știm că în regim laminar, raportul dintre viteza medie în conductă și viteza maximă este 0,5, pentru $Re < 2300$.

În regim turbulent, forma diagramei depinde de valoarea numărului Re , astfel:

$$Re = 2700 \quad \frac{u}{u_{\max}} = 0,75$$

$$Re = 10^6 \quad \frac{u}{u_{\max}} = 0,86$$

$$Re = 10^8 \quad \frac{u}{u_{\max}} = 0,9$$

La limită, când $Re \rightarrow \infty$, diagrama tinde către cea a fluidului ideal, în acest caz fluidul devine fără vîscozitate.

9.4. Ecuația Reynolds pentru mișcarea turbulentă a fluidelor reale

Ecuațiile lui Reynolds, se obțin din sistemul de ecuații Navier-Stokes, pe care îl scriem sub forma:

$$\begin{cases} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v = \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w = \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \end{cases} \quad (9.15)$$

Observăm că se pot face înlocuiri de forma:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} (uu) + \frac{\partial}{\partial y} (uv) + \frac{\partial}{\partial z} (uw) \quad (9.16)$$

deoarece dezvoltând termenii din membrul doi, se obțin termenii din membrul întâi, plus termenii din ecuația de continuitate, a căror sumă este nulă, considerând fluide incompresibile și mișcarea permanentă.

Sistemul (9.16) se poate scrie sub forma dată de (9.17):

Înlocuim toate mărimile cu medii temporale, considerând un interval de timp T suficient de mare, astfel încât mișcarea turbulentă să fie aproximată cu o mișcare permanentă.

$$\begin{cases} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) + \frac{\partial}{\partial z}(uw) \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(vu) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2) + \frac{\partial}{\partial z}(vw) \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(wu) + \frac{\partial}{\partial y}(wv) + \frac{\partial}{\partial z}(w^2) \end{cases} \quad (9.17)$$

Aplicăm regula de mediere temporală pentru prima ecuație:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left(X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u \right) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) dt$$

și obținem:

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \Delta \bar{u} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u}^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{u}\bar{w})}{\partial z} \quad (9.18)$$

Pentru calculul valorilor medii \bar{u}^2 , $\bar{u}\bar{v}$, $\bar{u}\bar{w}$, se ține cont de formula de mediere și

că $\bar{u}' = 0$. Astfel $u^2 = (\bar{u} + u')^2 = \bar{u}^2 + 2\bar{u}u' + u'^2$ iar prin mediere se obține: $\bar{u}^2 = \bar{u}^2 + \bar{u}'^2$

În mod analog, rezultă:

$$\bar{uv} = \bar{u} \bar{v} + \overline{u'v'} \quad \bar{uw} = \bar{u} \bar{w} + \overline{u'w'}$$

Ecuatia 67, devine:

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \Delta \bar{u} - \frac{\partial(\overline{u'u'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{u'v'})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{u'w'})}{\partial z} = \\ = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{u} \bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{u} \bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{u} \bar{w})}{\partial z} \end{aligned} \quad (9.19)$$

Dacă efectuăm derivarea din membrul doi și ținem cont de ecuația de continuitate, obținem ecuația (9.20):

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \Delta \bar{u} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x}(-\rho \overline{u'u'}) + \frac{\partial}{\partial x}(-\rho \overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial x}(-\rho \overline{u'w'}) \right] = \\ = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \end{aligned} \quad (9.20)$$

Ecuatia (9.20) este prima ecuație din sistemul Reynolds, în care termenul subliniat reprezintă forța unitară datorată pulsațiilor turbulente, iar ceilalți termeni au semnificațiile cunoscute din sistemul Navier-Stokes.

Analog se obțin și celelalte două ecuații și astfel putem scrie următorul sistem:

$$\begin{cases} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \Delta \bar{u} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x}(-\rho \overline{u'u'}) + \frac{\partial}{\partial x}(-\rho \overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial x}(-\rho \overline{u'w'}) \right] = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \Delta \bar{v} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x}(-\rho \overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial x}(-\rho \overline{v'v'}) + \frac{\partial}{\partial x}(-\rho \overline{v'w'}) \right] = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu \Delta \bar{w} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x}(-\rho \overline{u'w'}) + \frac{\partial}{\partial x}(-\rho \overline{v'w'}) + \frac{\partial}{\partial x}(-\rho \overline{w'w'}) \right] = \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \end{cases}$$

Putem concluziona că starea de tensiuni în mișcarea turbulentă se obține din starea de tensiuni de la mișcarea fluidelor reale descrisă de sistemul de ecuații Navier-Stokes, la care se adaugă termenii suplimentari reprezentând tensiuni unitare suplimentare datorate turbulenței. La aceste ecuații adăugăm și ecuația continuității:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0$$

Sistemul de ecuații determinat nu poate fi integrat în cazul general, deoarece are șapte necunoscute \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} , \bar{p} , u' , v' , w' și numai patru ecuații.

Sistemul de ecuații Reynolds, exprimă bine cauzele interne ale turbulenței, dar nu cuprinde și cauze externe cum ar fi rugozitatea peretelui.

Ecuațiile Reynolds, nu pot fi folosite în practică atâta timp cât nu se cunoaște dependența mărimilor oscilatorii față de valorile medii ale aceluiași mărimi. Pentru aplicarea în practică se utilizează două căi distincte:

- se fac ipoteze simplificatoare privind dependența dintre mărimi și se stabilesc legi și teorii semiempirice în scopul aplicării în practică;
- se studiază pe baza măsurărilor efectuate mărimile fluctuante și se stabilesc legi statistice pentru modul lor de variație, constituindu-se teorii statistice ale turbulenței.

Condițiile la limită pentru vitezele medii temporale sunt aceleași ca la mișcarea laminară, iar vitezele pulsatorii sunt nule la peretele solid sau în zona substratului limită laminar.

9.5. Calculul pierderilor de sarcină

Există numeroase cazuri tehnice în care determinarea pierderilor de sarcină este cea mai importantă problemă, ceea ce face ca studiul pierderilor de sarcină și influența factorilor care se manifestă în mișcările practice ale fluidelor, să constituie una din problemele fundamentale ale mecanicii fluidelor aplicate.

Pe baza a numeroaselor studii și cercetări, s-a convenit că pierderile de sarcină să se raporteze la energia cinetică a fluidului în mișcare și să se exprime cu o relație de forma:

$$h_r = \zeta \frac{v^2}{2g} \quad (9.22)$$

unde ζ este un coeficient care depinde de tipul pierderii de sarcină. Pentru pierderi de sarcină liniare acest coeficient are forma:

$$\zeta = \lambda \frac{l}{D} \quad (9.23)$$

unde l este lungimea, iar D este diametrul conductei. λ este coeficientul pierderilor de sarcină liniare și depinde de regimul de curgere și de natura pereților conductei.

Pentru curgerea laminară în conducte circulare, $\lambda = \frac{64}{Re}$, este coeficientul lui Darcy.

Coeficientul rezistențelor locale, denumit și coeficientul pierderilor de sarcină locale este în marea majoritate a cazurilor un coeficient determinat experimental. Acest coeficient, depinde de tipul rezistenței și de regimul de curgere.

Dependența de numărul Re este foarte complicată; la valori mari ale numărului Re se poate însă neglija dependența de Re .

Pentru un curent de fluid, pierderea de sarcină totală este suma pierderilor liniare și locale.

9.6. Conducte netede și conducte rugoase; grosimea stratului laminar

Indiferent de gradul de turbulență al curentului de fluid, în vecinătatea pereților conductelor există un strat inelar de fluid care se deplasează cu viteze mici, numit substrat laminar, deoarece mișcarea în această zonă este laminară. Restul secțiunii conductei va forma miezul turbulent al conductei, caracterizat prin viteze mari de curgere, figura 49.

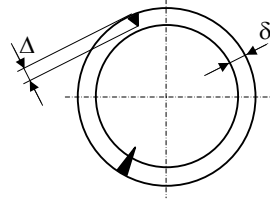


Fig. 49. Strat laminar

Deosebim două situații distincte privind relația de ordine dintre rugozitatea absolută Δ a peretelui conductei și grosimea substratului laminar. În primul caz $\Delta < \delta_l$, rugozitatea este acoperită de substratul laminar și nu influențează pierderile de sarcină; în această situație conducta se numește netedă în sens hidraulic.

În cazul al doilea, rugozitatea depășește grosimea substratului laminar, $\Delta > \delta_l$, iar extremitățile pătrund în miezul turbulent al curgerii unde se produc frecări suplimentare și pierderi de energie prin impactul fluidului cu vârfurile rugozităților. Conducta, în această situație se numește conductă rugoasă.

Pentru a decide natura conductei, netedă sau rugoasă, va trebui să dispunem de o relație de calcul a grosimii substratului laminar δ_l . Pentru a determina această relație Nikuradse a propus o dependență de forma:

$$\delta_l = \alpha \cdot \eta^x \rho^y \tau_0^z$$

unde α este un coeficient adimensional, η viscozitatea dinamică, ρ densitatea și τ_0 este tensiunea unitară de frecare la perete.

Exponenții x , y , z , se pot determina prin metoda Reyleigh. Înlocuim mărimile fizice prin dimensiunile lor:

$$m = (kg \cdot m^{-1} s^{-1})^x (kg \cdot m^{-3})^y (kg \cdot m^{-1} s^{-2})^z$$

Obținem un sistem liniar în x , y și z , prin identificare:

$$\begin{cases} m \\ kg \\ s \end{cases} \begin{cases} 1 = -x - 3y - z \\ 0 = x + y + z \\ 0 = -x - 2z \end{cases} \text{ care are soluțiile: } x = 1; y = -\frac{1}{2}; z = -\frac{1}{2}$$

Rezultă că relația de calcul a grosimii δ_l , este:

$$\delta_l = \alpha \cdot \eta \cdot \rho^{-\frac{1}{2}} \tau_0^{-\frac{1}{2}} = \frac{\alpha \cdot \eta}{\sqrt{\rho \cdot \tau_0}} = \frac{\alpha \cdot \eta}{\sqrt{\rho \cdot \frac{\tau_0}{\rho^2}}} = \frac{\alpha \cdot \nu}{\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}} \quad (9.24)$$

Notăm $\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \nu_*$ și o numim viteza tensiunii tangențiale, grosimea substratului

laminar, devenind: $\delta_l = \frac{\alpha \cdot \nu}{\nu_*} \quad (9.25)$

Știm că efortul de frecare la perete în mișcarea laminară este:

$$\tau_0 = \frac{\gamma \cdot I \cdot r}{2} = \frac{\gamma \cdot h d \cdot r}{2l}$$

Înlocuind în relația (9.24) care dă grosimea stratului laminar, obținem:

$$\delta_l = \frac{\alpha \cdot \nu}{\sqrt{\frac{\gamma \cdot h d \cdot r}{2l \cdot \rho}}} = \frac{\alpha \cdot \nu}{\sqrt{\frac{g \cdot \lambda \cdot l \cdot \nu^2 \cdot d}{8g \cdot d}}} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \alpha \cdot d \cdot \nu}{\sqrt{\lambda} \cdot \nu \cdot d} = \text{pentru } \alpha = 11,5. \quad (9.26)$$

$$= \frac{2\sqrt{2} \cdot \alpha \cdot d}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} = \frac{32}{\text{Re} \sqrt{\lambda}}$$

9.7. Determinarea coeficientului pierderilor de sarcină liniare

Coeficientul pierderilor liniare de sarcină λ , depinde în general de gradul de turbulență, prin numărul lui Re, precum și de rugozitatea relativă a conductei $\frac{\Delta}{d}$. Influența celor doi factori este diferită de la o conductă la alta, după cum este ea netedă sau rugoasă. Pentru conducte netede din punct de vedere hidraulic, $\left(\frac{\Delta}{\delta_l} < 1\right)$, rugozitatea influențează în mică măsură coeficientul λ ; pentru aceste conducte au fost elaborate formule determinate experimental, dependente de numărul lui Re.

- Pentru $4000 < \text{Re} < 10^5$, se poate utiliza formula lui Blasius:

$$\lambda = \frac{0,3164}{\text{Re}^{0,25}} = \frac{1}{\sqrt[4]{100 \text{Re}}} \quad (9.27)$$

- Pentru $\text{Re} > 10^5$, există mai multe formule stabilite în mod empiric:

$$\lambda = (1,82 \lg \text{Re} - 1,64)^{-2} \quad \text{formula lui Filonenko}$$

$$\lambda = (1,8 \lg \text{Re} - 1,5)^{-2} \quad \text{formula lui Konakov}$$

Pentru conducte rugoase din punct de vedere hidraulic, $\left(\frac{\Delta}{\delta_l} > 3\right)$, λ depinde practic numai de rugozitatea relativă și poate fi calculată cu formula lui Nikuradse:

$$\lambda = \left(2 \lg \frac{d}{2\Delta} + 1,74\right)^{-2} = \frac{1}{4 \left[\lg \left(\frac{3,71 \cdot d}{\Delta} \right) \right]^2} \quad (9.28)$$

Pentru conducte semirugoase caracterizate prin $\frac{\Delta}{\delta_l} \in (1,3)$, λ este determinat printr-o formulă semiempirică, care conține pe λ sub formă implicită:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \lg \left(\frac{2,51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} + \frac{\Delta}{3,71 \cdot d} \right) \quad (9.29)$$

cunoscută și sub numele de formula lui Colebrook și White.

Pentru folosirea acestei formule se adoptă un procedeu iterativ, descris mai jos:

- se adoptă în primă aproximație pentru λ o valoare λ_0 rezultată din formula lui Nikuradse, care se înlocuiește în membrul II al formulei implicite;
- rezultă din membrul I o valoare λ_1 ;
- cu valoarea găsită se revine în membrul II al formulei implicite, obținând o altă valoare λ_2 ; procedeul este rapid convergent și dacă diferențele sunt mici putem înlocui pe λ cu valoarea λ_2 .

Metoda generală de calcul a coeficientului λ cuprinde următoarele etape:

- calculăm numărul Re ; dacă este mai mic decât 2300 mișcarea este laminară și $\lambda = \frac{64}{Re}$, iar dacă este mai mare regimul de curgere este turbulent și se procedează în felul următor:

- a. se emite în primul rând ipoteza unei conducte netede $\left(\frac{\Delta}{\delta_l} < 1, \delta_l = \frac{32 \cdot d}{Re \sqrt{\lambda}} \right)$, când λ se calculează cu formula lui Blasius sau formula lui Konakov;
- b. se verifică ipoteza conductei netede calculând grosimea substratului laminar și verificând restricția $\frac{\Delta}{\delta_l} < 1$; dacă aceasta este îndeplinită conducta este netedă și λ rămâne definitiv calculat; dacă ipoteza conductei netede nu se verifică, vom considera conducta rugoasă $\left(\frac{\Delta}{\delta_l} > 3 \right)$ și vom folosi formula lui Nikuradse;
- c. se verifică imediat și această ipoteză;
 - dacă restricția pentru conducta rugoasă nu se verifică, aceasta va fi semirugoasă și se aplică formula implicită, prin procedeul descris mai sus.

9.8. Calculul pierderilor locale de sarcină

Considerăm o conductă care prezintă o lărgire bruscă a secțiunii de la suprafața A_1 la suprafața A_2 , figura 50.

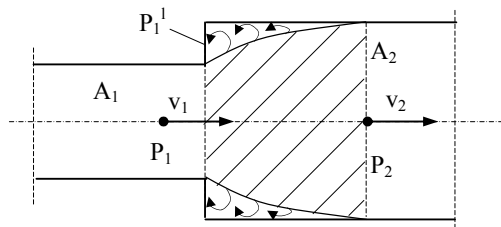


Fig. 50. Conductă cu variație bruscă de secțiune

Secțiunea vânei de fluid nu crește brusc la intrarea în cea de-a doua porțiune de conductă la valoarea A_2 , ci în mod continuu astfel încât până la realizarea secțiunii maxime se creează o zonă de vârtejuri a căror energie cinetică provine din energia curentului de fluid.

Această parte de energie se consumă deci pentru întreținerea mișcării turbionare și reprezintă o pierdere de sarcină datorată destinderii bruște a secțiunii.

Ne propunem să determinăm analitic pierderea de sarcină prin această destindere bruscă a secțiunii.

Scriem ecuația lui Bernoulli între punctele 1 și 2 ale conductei:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_d \quad (9.30)$$

Deoarece $z_1 = z_2$, rezultă:

$$h_d = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} + \frac{p_1 - p_2}{\gamma}$$

Vom elimina diferența de presiune $p_1 - p_2$ aplicând teorema impulsului între cele două puncte, proiectând pe axa conductei:

$$m_2 v_2 - m_1 v_1 = p_1 A_1 + p'_1 (A_2 - A_1) - p_2 A_2 \quad (9.31)$$

unde:

$$\begin{cases} m_1 = \rho \cdot Q_1 = \rho \cdot A_1 \cdot v_1 \\ m_2 = \rho \cdot Q_2 = \rho \cdot A_2 \cdot v_2 \end{cases}$$

și putem face aproximația $p_1 = p'_1$.

Relația (9.31) devine:

$$\rho \cdot A_2 \cdot v_2^2 - \rho \cdot A_1 \cdot v_1^2 = A_2 (p_1 - p_2) \quad (9.32)$$

de unde:

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho(A_2 v_2^2 - A_1 v_1^2)}{A_2} = \rho \left(v_2^2 - \frac{A_1}{A_2} v_1^2 \right) \quad (9.33)$$

Utilizând ecuația de continuitate, obținem:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

rezultă:

$$p_1 - p_2 = \rho \cdot v_2^2 - \rho \cdot v_1 v_2 \quad (9.34)$$

Expresia pierderii de sarcină prin deschiderea bruscă a conductei, devine:

$$\begin{aligned} h_d &= \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} + \frac{p_1 - p_2}{\gamma} = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} + \frac{\rho(v_2^2 - v_1 v_2)}{\gamma} = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} + \frac{v_2^2 - v_1 v_2}{g} = \\ &= \frac{v_1^2 - v_2^2 + 2v_2^2 - v_1 v_2}{2g} = \frac{v_2^2 + v_1^2 - 2v_1 v_2}{2g} = \frac{(v_1 - v_2)^2}{2g} \end{aligned} \quad (9.35)$$

care reprezintă formula lui Borda-Carnot.

Putem exprima pierderea de sarcină în funcție de o singură viteză, de exemplu în funcție de v_2 :

$$h_d = \frac{\left(\frac{A_1}{A_2} v_2 - v_2 \right)^2}{2g} = \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2 \frac{v_2^2}{2g} = \zeta_d \frac{v_2^2}{2g} \quad (9.36)$$

unde: $\zeta_d = \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2$ reprezintă coeficientul de rezistență hidraulică la destinderea

bruscă a conductei. Acest coeficient dedus teoretic se determină și experimental suficient de exact, destinderea bruscă a conductei fiind singurul tip de rezistență hidraulică locală, care se poate studia analitic.

Pentru alte tipuri de rezistențe hidraulice, cum ar fi: îngustarea bruscă de secțiune, trecerea prin coturi simple, duble și altele, coeficientul de rezistență hidraulică se determină numai experimental.

De exemplu, în cazul inversării sensului de curgere deci îngustarea secțiunii conductei în mod brusc, coeficientul determinat experimental este 0,5 din valoarea celui calculat teoretic.

10. CURGEREA PRIN ORIFICII ȘI AJUTAJE

Considerăm curgerea prin orificii prevăzute în pereți subțiri, prin care se înțeleg orificii cu muchii ascuțite, astfel încât vâna de fluid care iese prin acestea, să nu fie influențată de grosimea reală a peretelui rezervorului.

Deosebim următoarele categorii de orificii:

- orificii situate în pereți; laterali sau la baza rezervorului;
- orificii care debitează liber în atmosferă;
- orificii înecate, care debitează într-un alt rezervor cu lichid, orificiile fiind sub nivelul lichidului din cel de al doilea rezervor;

- orificii sub sarcină constantă sau sub sarcină variabilă
(prin sarcina orificiului înțelegând distanța dintre centrul orificiului și suprafața liberă a lichidului).

distanța dintre centrul orificiului și suprafața liberă a lichidului).

Indiferent de tipul orificiului vâna de fluid care iese din orificiu prezintă fenomenul de contracție, secțiunea curenților de fluid căpătând o valoare minimă numită secțiune contractată.

10.1. Calculul debitului unui orificiu mic sub sarcină constantă

Considerăm o linie de curent și pe ea două puncte 0 și 1, primul pe suprafața liberă a lichidului, iar al doilea în secțiunea îngustată a vânei de fluid la nivelul axei orificiului, figura 51.

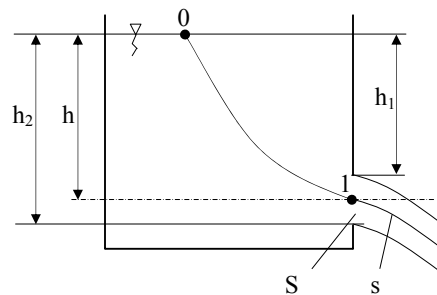


Fig. 51. Orificiu mic, liber

Vom neglija pierderea de sarcină în interiorul rezervorului în raport cu pierderea de sarcină prin orificiu.

Relația lui Bernoulli între cele două puncte considerate este:

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + z_0 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 + h_r \quad (10.1)$$

unde v_0 poate fi neglijată, $p_0 = p_1 =$ presiunea atmosferică, $z_0 = h$, $z_1 = 0$, iar h_r este pierderea de sarcină în orificiu considerat care se poate exprima cu relația $h_r = \zeta \frac{v_1^2}{2g}$, ζ fiind coeficientul pierderilor locale de sarcină în cazul rezistenței hidraulice determinată de orificiu.

Ecuția lui Bernoulli devine:

$$h = \frac{v_1^2}{2g} + \zeta \frac{v_1^2}{2g} = (1 + \zeta) \frac{v_1^2}{2g}$$

de unde:
$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} \sqrt{2gh} = C_v \sqrt{2gh} \quad (10.2)$$

C_v fiind un coeficient de corecție a vitezei, care pentru orificiile circulare are valoarea aproximativ 0,98.

Debitul vânei de fluid se scrie:

$$Q = s \cdot v_1 = \frac{S}{S} S \sqrt{2gh} C_v = C_s C_v S \sqrt{2gh} = C_d S \sqrt{2gh} \quad (10.3)$$

unde:

- s este secțiunea minimă a jetului de fluid care iese din orificiu, denumită și secțiune contractată;
- S este secțiunea orificiului;
- C_s este coeficientul de contracție a secțiunii, $C_s = \frac{s}{S} = 0,62$;
- C_d este coeficientul de debit, $C_d = C_v \cdot C_s = 0,61$.

Putem face observația că în calculul debitului am admis că pe secțiunea S a orificiului viteza rămâne practic constantă cu cea din centrul secțiunii. Acest lucru este permis numai pentru orificiile mici, caracterizate prin condiția $h > 3(h_2 - h_1)$, unde h_2 este cota muchiei inferioare a orificiului, h_1 este cota muchiei superioare. Altfel spus, sarcina orificiului întrece de trei ori înălțimea orificiului.

10.2. Calculul debitului orificiului mare

Dacă condiția $h > 3(h_2 - h_1)$ nu este îndeplinită, orificiul este considerat mare din punct de vedere hidraulic. În acest caz, viteza variază pe înălțimea orificiului, iar debitul se va obține prin integrare.

Considerăm un orificiu mare în peretele lateral a unui rezervor, figura 52 și la distanța y de suprafața liberă a lichidului un element de suprafață de lățime $b(y)$ și grosime dy .

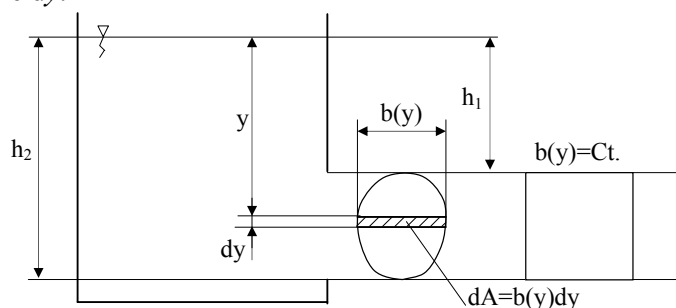


Fig. 52. Orificiul mare

Suprafața elementară $dA = b(y) \cdot dy$ corespunde unui orificiu mic, iar debitul său va fi:

$$dQ = C_d \cdot b(y) dy \cdot \sqrt{2gy} \quad (10.4)$$

Debitul întregului orificiu se obține prin integrare după y :

$$Q = \int_{h_1}^{h_2} C_d b(y) \sqrt{2gy} dy \quad (10.5)$$

În cazul particular a unui orificiu cu secțiune dreptunghiulară relația de calcul devine:

$$Q = \int_{h_1}^{h_2} C_d \cdot b \sqrt{2g} \cdot y^{\frac{1}{2}} dy = C_d \cdot b \cdot \sqrt{2g} \cdot \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \Big|_{h_1}^{h_2} = \frac{2}{3} C_d \cdot b \cdot \sqrt{2g} \left(h_2^{\frac{3}{2}} - h_1^{\frac{3}{2}} \right) \quad (10.6)$$

10.3. Calculul debitului orificiului înecat

Considerăm două rezervoare cu lichid având nivelele diferite, cu un perete comun, prevăzut cu un orificiu de secțiune S și coeficient de debit C_d . Admitem în primul caz că orificiul este mic, figura 53.

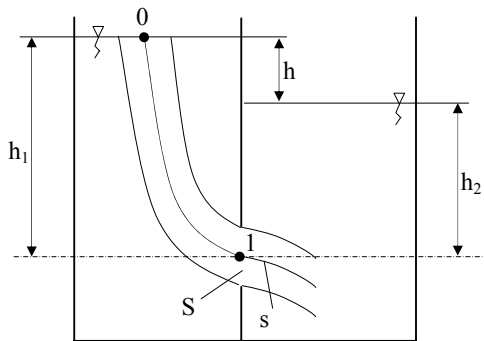


Fig. 53. Orificiu înecat

Vom admite în intervalul de timp necesar determinării debitului, că nivelele din cele două rezervoare rămân constante. Și la acest fel de curgere se formează o secțiune contractată a vânei de fluid.

Aplicăm relația lui Bernoulli între punctele 0 și 1, ale unei linii de curent:

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + z_0 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 + h_r$$

unde: $v_0 = 0$, $p_0 =$ presiunea atmosferică, $p_1 = p_0 + \gamma \cdot h_2$, $z_0 = h_1$, $z_1 = 0$, $h_r = \zeta \frac{v_1^2}{2g}$.

Relația lui Bernoulli, devine:

$$\frac{p_0}{\gamma} + h_1 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_0 + \gamma \cdot h_2}{\gamma} + \zeta \frac{v_1^2}{2g}$$

$$\text{sau: } h_1 - h_2 = h = (1 + \zeta) \frac{v_1^2}{2g}$$

de unde rezultă:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta}} \sqrt{2gh} = C_v \sqrt{2gh} \quad (10.7)$$

unde h reprezintă sarcina orificiului înecat.

Debitul scurs prin orificiu, este:

$$Q = s \cdot v_1 = \frac{S}{S} S \cdot C_v \sqrt{2gh} = C_s C_v S \sqrt{2gh} = C_d S \sqrt{2gh} \quad (10.8)$$

În calculele practice, coeficienții C_s , C_v și C_d se consideră egali cu cei de la orificiul neînecat.

Observăm că rezultatul este independent de cotele muchiilor superioare sau inferioare ale orificiului, depinzând doar de denivelarea lichidului din cele două rezervoare.

În cazul orificiului înecat mare, reluând raționamentele din paragraful anterior vom scrie debitul orificiului elementar sub forma:

$$dQ = C_d dA \sqrt{2gh}$$

iar debitul total:

$$Q = \int_S dQ = \int_S C_d \sqrt{2gh} dA = C_d \sqrt{2gh} \int_S dA = C_d S \sqrt{2gh} \quad (10.9)$$

10.4. Curgerea sub sarcină variabilă prin orificii situate la baza rezervorului. Timpul de golire al unui rezervor

Considerăm un rezervor de o formă geometrică oarecare, figura 54, având la bază un orificiu de secțiune s și coeficientul de debit C_d .

Inițial orificiul este acoperit, iar în rezervor se află lichid la înălțimea H_0 . Deschizând brusc orificiul ne propunem să determinăm timpul în care lichidul coboară la o cotă $H_1 < H_0$. Timpul de golire se va obține înlocuind $H_1 = 0$.

Pentru rezolvarea acestei probleme vom determina legea de variație în timp a înălțimii y a coloanei de lichid din rezervor. Acest lucru se obține scriind în două moduri distincte dar echivalente volumul elementar dV de lichid evacuat într-un interval de timp dt .

Primul mod de scriere este cel geometric:

$$dV = A(y) \cdot (-dy) \quad (10.10)$$

unde semnul minus s-a introdus deoarece y este o funcție descrescătoare de timp.

Al doilea mod de scriere este cel hidraulic:

$$dV = Q(y) dt = C_d s \sqrt{2gy} dt \quad (10.11)$$

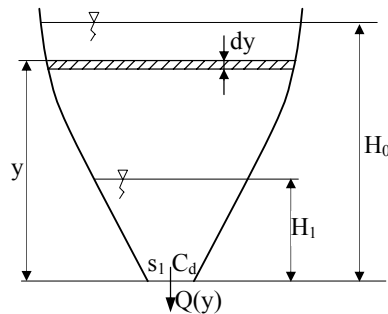


Fig. 54 Rezervor cu secțiune variabilă

Este evident că în cazul orificiilor de la baza rezervoarelor, coloana de lichid este aceeași pentru toate punctele orificiului, deci dispare noțiunea de orificiu mic sau mare.

Egalând expresiile volumului elementar, obținem:

$$-A(y) dy = C_d s \sqrt{2gy} dt$$

$$\text{de unde: } dt = -\frac{A(y) dy}{C_d s \sqrt{2gy}} \quad (10.12)$$

Vom integra această ecuație diferențială, făcând corespondențele:

$$\begin{cases} t = 0 \Rightarrow y = H_0 \\ t = t_1 \Rightarrow y = H_1 \end{cases} \quad (10.13)$$

deci, obținem:

$$t_1 = \int_{H_1}^{H_0} \frac{A(y) dy}{C_d s \sqrt{2gy}} \quad (10.14)$$

iar timpul de golire:

$$t_g = \int_0^{H_0} \frac{A(y) dy}{C_d s \sqrt{2gy}} \quad (10.15)$$

În cazul particular al unui rezervor prismatic vom avea $A(y) = A = Ct$, iar timpul de golire, devine:

$$\begin{aligned} t_g &= \int_0^{H_0} \frac{A(y) dy}{C_d s \sqrt{2gy}} = \frac{A}{C_d s \sqrt{2g}} \int_0^{H_0} \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{A}{C_d s \sqrt{2g}} \int_0^{H_0} y^{-\frac{1}{2}} = \frac{A}{C_d s \sqrt{2g}} 2y^{\frac{1}{2}} \Big|_0^{H_0} = \\ &= \frac{2A}{C_d s \sqrt{2g}} \sqrt{H_0} = \frac{2AH_0}{C_d s \sqrt{2gH_0}} = \frac{2V_{\text{rezervor}}}{C_d s \sqrt{2gH_0}} = \frac{2V_{\text{rez}}}{Q_0} = 2t_0 \end{aligned} \quad (10.16)$$

unde Q_0 este debitul inițial al orificiului, iar $t_0 = \frac{V_{\text{rez}}}{Q_0}$ reprezintă timpul în care se

elimină din rezervor un volum de lichid egal cu volumul rezervorului în ipoteza că sarcina orificiului rămâne constantă H_0 . Rezultatul se explică prin faptul că pe măsură ce nivelul scade, scade și debitul orificiului, deci timpul de evacuare a volumului rezervorului se va mări.

10.5. Curgerea sub sarcină variabilă și cu debit afluent constant

Considerăm un rezervor cu lichid, având la bază un orificiu de secțiune s și coeficient de debit C_d . La partea superioară, rezervorul este alimentat cu un debit constant Q_0 , numit debit afluent, figura 55.

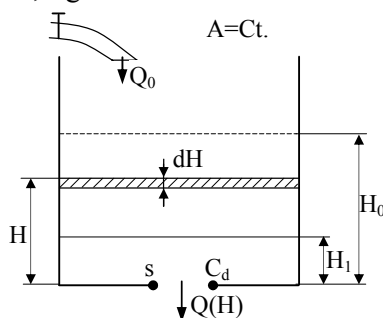


Fig. 55 Orificiu la baza rezervorului

Suprafața liberă a lichidului se găsește inițial la cota H_l .

Deosebim următoarele situații:

- 1) Debitul inițial al orificiului este egal cu debitul afluent, adică:

$$C_d s \sqrt{2gH_1} = Q_0 = C_d s \sqrt{2gH_0} \quad (10.17)$$

ceea ce înseamnă că $H_I = H_0$. În această situație, nivelul rămâne staționar la cota $H_0 = \frac{Q_0^2}{C_d^2 s^2 2g}$.

2) Debitul orificiului este mai mare decât debitul afluent, cota H_I va fi mai mare decât cota H_0 , caz în care nivelul lichidului va coborî către cota de echilibru H_0 .

3) Debitul orificiului este mai mic decât debitul afluent, cota H_I va fi mai mică decât H_0 , iar nivelul lichidului va crește în rezervor, cazul din figura 95, tinzând către H_0 . Ne propunem să analizăm acest ultim caz și să determinăm timpul de urcare a nivelului de la cota H_I la H , cotă intermediară între H_I și H_0 . Timpul de atingere a nivelului staționar, se va obține egalând pe H cu H_0 .

Scriem pentru acest caz creșterea elementară de volum dV în rezervor în două moduri, geometric și hidraulic: $dV = A \cdot dH$ și

$$dV = -Q(H) dt + Q_0 dt = -C_d s \sqrt{2gH} dt + Q_0 dt = -C_d s \sqrt{2gH} dt + C_d s \sqrt{2gH_0} dt = C_d s \sqrt{2g} (\sqrt{H_0} - \sqrt{H}) dt$$

Egalând cele două relații, obținem:

$$A dH = C_d s \sqrt{2g} (\sqrt{H_0} - \sqrt{H}) dt$$

de unde:

$$dt = \frac{A dH}{C_d s \sqrt{2g} (\sqrt{H_0} - \sqrt{H})} = K \frac{d}{\sqrt{H_0} - \sqrt{H}} \quad (10.18)$$

Integrăm această ecuație diferențială, făcând corespondențe între t și H :

$$\begin{cases} \text{pentru } t = 0 \Rightarrow H = H_I \\ \text{pentru } t = t \Rightarrow H = H \in (H_I, H_0) \end{cases} \quad (10.19)$$

$$\int_0^t dt = \int_{H_I}^H K \frac{dH}{\sqrt{H_0} - \sqrt{H}}$$

Pentru efectuarea integralei din membrul II, notăm:

$$\sqrt{H_0} - \sqrt{H} = y$$

care prin diferențiere devine:

$$-\frac{dH}{2\sqrt{H}} = dy$$

$$\text{de unde: } dH = -2\sqrt{H} dy = 2dy(y - \sqrt{H_0}) \quad (10.20)$$

Integrala devine:

$$\begin{aligned} t &= K \int_{\sqrt{H_0}-\sqrt{H_I}}^{\sqrt{H_0}-\sqrt{H}} \frac{2dy(y-\sqrt{H_0})}{y} = 2K \int_{\sqrt{H_0}-\sqrt{H_I}}^{\sqrt{H_0}-\sqrt{H}} \left(1 - \frac{\sqrt{H_0}}{y}\right) dy = 2K \left[y - \sqrt{H_0} \ln y \right]_{\sqrt{H_0}-\sqrt{H_I}}^{\sqrt{H_0}-\sqrt{H}} = \\ &= 2K \left[\sqrt{H_I} - \sqrt{H} - \sqrt{H_0} \ln \frac{\sqrt{H_0}-\sqrt{H}}{\sqrt{H_0}-\sqrt{H_I}} \right] \end{aligned} \quad (10.21)$$

Timpul de atingere a cotei de echilibru se obține pentru $H = H_0$. În acest caz $t \rightarrow \infty$, ceea ce înseamnă că procesul de atingere a cotei de echilibru este un proces asimptotic. Practic, putem admite atingerea nivelului de echilibru dacă abaterea relativă

$\frac{H_0 - H}{H_0} \cdot 100 \leq 2 \dots 3$. Așadar atingerea nivelului staționar se poate admite pentru o abatere relativ mică, față de cota de echilibru impusă de noi în mod convențional.

10.6. Curgerea sub sarcină variabilă printr-un orificiu înecat

Considerăm două rezervoare prismatice de secțiuni A_1 și A_2 având în peretele comun un orificiu înecat de secțiune s și coeficientul de debit C_d , figura 56.

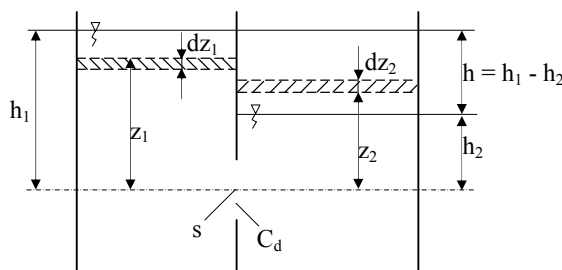


Fig. 56. Orificiu înecat cu sarcină variabilă

Fie h_1 și h_2 înălțimile coloanei de lichid față de axa orificiului în momentul inițial și z_1 , z_2 aceleași înălțimi la un moment dat.

Pentru un interval de timp elementar dt , nivelul coboară la stânga cu $-dz_1$ și urcă în dreapta cu dz_2 . La un moment dat, denivelarea lichidului dintre cele două rezervoare este $z = z_1 - z_2$, unde z este și sarcina orificiului înecat la un moment respectiv. Ne propunem să determinăm legea de variație în timp a denivelării și apoi pentru $z = 0$ să obținem timpul de egalizare a nivelelor.

Într-un interval de timp dt se transferă un volum elementar de lichid dV , care se poate exprima geometric și hidraulic astfel:

$$\begin{aligned} dV &= -A_1 dz_1 = A_2 dz_2 \\ dV &= Q dt = C_d s \sqrt{2gz} dt \end{aligned} \quad (10.22)$$

Egalând cele două expresii, obținem:

$$-A_1 dz_1 = A_2 dz_2 = C_d s \sqrt{2gz} dt \quad \text{și} \quad dz_2 = -\frac{A_1}{A_2} dz_1$$

Diferențiind expresia $z = z_1 - z_2$, obținem: $dz = dz_1 - dz_2$

Rezultă:

$$dz_1 + \frac{A_1}{A_2} dz_1 = dz \quad (10.23)$$

de unde: $dz_1 = \frac{A_2}{A_1 + A_2} dz$

Folosind egalitatea $-A_1 dz_1 = C_d s \sqrt{2gz} dt$ și efectuând înlocuirile, obținem:

$$\frac{-A_1 A_2}{A_1 + A_2} dz = C_d s \sqrt{2gz} dt$$

$$\text{sau:} \quad dt = \frac{-\frac{A_1 A_2}{A_1 + A_2} dz}{C_d s \sqrt{2gz}^{\frac{1}{2}}} = -K \cdot z^{-\frac{1}{2}} dz \quad (10.24)$$

Integrăm această ecuație, urmărind corespondența:

$$\begin{cases} t = 0 \Rightarrow z = h_1 - h_2 = h \\ t = t \Rightarrow z = z(t) \end{cases} \quad (10.25)$$

$$\int_0^t dt = -K \int_h^z z^{-\frac{1}{2}} dz \text{ de unde: } t = 2K(\sqrt{h} - \sqrt{z})$$

$$\text{sau:} \quad t = \frac{2A_1 A_2}{C_d s \sqrt{2g}} (\sqrt{h} - \sqrt{z}) \quad (10.26)$$

Timpul de egalizare a nivelelor se determină prin condiția $z = 0$:

$$t_{eg} = \frac{\frac{2A_1 A_2}{A_1 + A_2} \sqrt{h}}{C_d s \sqrt{2g}} = \frac{A^* h}{C_d s \sqrt{2gh}} = \frac{V^*}{Q_0} \quad (10.27)$$

unde $A^* = \frac{2A_1 A_2}{A_1 + A_2}$ este media armonică a secțiunilor A_1 și A_2 , iar V^* este volumul

unui rezervor prismatic cu lichid având înălțimea h și secțiunea transversală media armonică a secțiunilor rezervoarelor. Q_0 , reprezintă debitul inițial al orificiului înecat.

10.7. Curgerea prin ajutaje

Ajutajele sunt tuburi relativ scurte având suprafața laterală o suprafață de rotație de lungime $l = (2 \dots 3)d_{med}$. Aceste tuburi se montează în dreptul orificiilor rezervoarelor în scopul măririi debitelor acestora.

Ajutajele pot fi de mai multe categorii:

- după forma geometrică a suprafeței laterale pot fi:
 - cilindrice; tronconice; curbilinii
- după unghiul dintre axa ajutajului și peretele rezervorului, pot fi:
 - drepte; înclinate
- după modul în care ajutajul evacuează lichidul din rezervor, pot fi:
 - ajutaje libere (debitează în atmosferă)
 - ajutaje înecate
- după locul de montare în raport cu peretele orificiului, pot fi:
 - exterioare; interioare

Vom studia în continuare ajutajul cilindric drept care debitează liber în atmosferă, figura 57.

Problemele care apar la calculul unui ajutaj sunt următoarele:

- determinarea formulei debitului;
- determinarea sarcinii vacuometrice h_v ;
- pierderea de sarcină prin ajutaj.

Problemele care apar la calculul unui ajutaj sunt următoarele:

- determinarea formulei debitului;
- determinarea sarcinii vacuometrice h_v ;
- pierderea de sarcină prin ajutaj.

Ca și în cazul orificiilor, vâna de fluid care intră în ajutaj prezintă o secțiune minimă, urmată de o creștere de secțiune până la

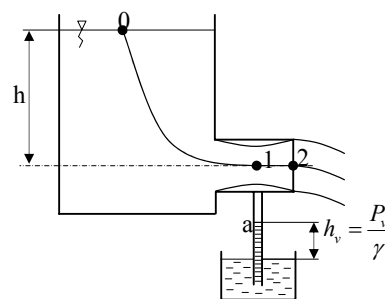


Fig. 57. Ajutaj

valoarea secțiunii ajutajului între punctele 1 și 2, creștere care este asimilată cu o destindere bruscă de secțiune datorată distanței mici dintre cele două puncte.

Aplicăm relația lui Bernoulli între punctele 0 și 2, luând în considerație pierderile de sarcină la intrarea în orificiul ajutajului și pierderea de sarcină prin desprindere bruscă pe porțiune dintre punctele 1 și 2.

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + z_0 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_{r_0} + h_{r_d}$$

$$\text{unde: } v_0 \cong 0, z_0 = h, v_2 = v, p_2 = p_0, z_2 = 0, h_{r_0} = 0,11 \frac{v^2}{2g},$$

$$h_{r_d} = \left(\frac{A_2}{A_1} - 1 \right)^2 \frac{v^2}{2g} = \left(\frac{1}{C_s} - 1 \right)^2 \frac{v^2}{2g} = \left(\frac{1}{0,62} - 1 \right)^2 \frac{v^2}{2g} = 0,37 \frac{v^2}{2g}$$

Relația lui Bernoulli, devine:

$$h = \frac{v^2}{2g} + 0,11 \frac{v^2}{2g} + 0,37 \frac{v^2}{2g} = 1,48 \frac{v^2}{2g}$$

$$\text{de unde: } v = \frac{1}{\sqrt{1,48}} \sqrt{2gh} \cong 0,82 \sqrt{2gh}$$

Debitul prin ajutaj, va fi:

$$Q = \frac{\pi \cdot d^2}{4} v = 0,82 \frac{\pi \cdot d^2}{4} \sqrt{2gh} \quad (10.28)$$

unde 0,82 este coeficientul de debit al ajutajului.

Reamintim că pentru un orificiu circular coeficientul de debit este 0,61, deci debitul ajutajului este mai mare decât cel al orificiului, pentru aceeași sarcină h . De aici rezultă și scopul utilizării ajutajului adică creșterea debitului orificiului.

Această creștere de debit se explică fizic prin crearea în secțiunea îngustată a vânei de fluid a unei puternice depresiuni care accelerează fluidul prin orificiu măbind debitul acestuia. Pentru calculul depresiunii în secțiunea îngustată se poate proceda atât experimental, cât și analitic.

Experimental se procedează astfel se montează un tub vacuumetric vertical în secțiunea mediană a ajutajului, având capătul introdus într-un vas cu lichid. În acest tub se aspiră o coloană de lichid h_v .

Aplicând ecuația fundamentală a hidrostaticii între suprafața liberă a lichidului din vas și un punct a de pe suprafața lichidului din tub, vom obține:

$$h_v = \frac{p_0 - p_a}{\gamma} = \frac{p_v}{\gamma} \quad (10.29)$$

unde p_a este presiunea absolută din secțiunea îngustată și p_v este presiunea vacuumetrică. H_v se mai numește și sarcina vacuumetrică a ajutorului.

Pe cale analitică, putem determina sarcina vacuumetrică aplicând relația lui Bernoulli între punctele 0 și 1:

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + z_0 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 + h_{r_0}$$

$$\text{unde } v_0 \cong 0, z_0 = h, z_1 = 0, \frac{p_0 - p_1}{\gamma} = \frac{p_v}{\gamma} = h_v$$

$$\text{Rezultă: } h_v = \frac{v_1^2}{2g} + h_{r_0} - h \quad (10.30)$$

Vom exprima viteza v_1 în funcție de viteza v în baza ecuației de continuitate:

$$v_1 S = v \cdot S \quad v_1 = v \frac{S}{s} = \frac{v}{C_s} = \frac{v}{0,62} = 1,32\sqrt{2gh}$$

$$\text{de unde: } \frac{v_1^2}{2g} = (1,32)^2 h = 1,74h$$

Dacă exprimăm și h_{r_0} funcție de h ($h_{r_0} = 0,04 \dots 0,07h$), relația lui Bernoulli devine:

$$h_v = 1,74h + 0,04h - h = 0,78h \quad (10.31)$$

Observăm că depresiunea din ajutoraj, h_v este direct proporțională cu sarcina ajutorului h . Pentru o funcționare stabilă a ajutorului presiunea din secțiunea îngustată nu trebuie să scadă sub valoarea presiunii de vaporizare a fluidului deoarece în acest caz, fluidul devine bifazic (gaz+fluid), iar curgerea normală prin ajutoraj încetează.

Așadar, se impune restricția $p_1 \geq p_{vap}$ și deci:

$$\frac{p_0 - p_1}{\gamma} = h_v \leq \frac{p_0 - p_{vap}}{\gamma} \quad (10.32)$$

$$\text{sau: } 0,78h \leq \frac{p_0 - p_{vap}}{\gamma} \quad \text{de unde: } h \leq \frac{p_0 - p_{vap}}{0,78\gamma} \quad (10.33)$$

Rezultă că sarcina unui ajutoraj nu trebuie să depășească valoarea limită de mai sus care pentru lichidele uzuale este de 6... 7m.

Pentru calculul pierderii de sarcină prin ajutoraj, scriem relația lui Bernoulli între punctele 0 și 2, considerând pierderile de sarcină prin orificiu și prin deschiderea bruscă:

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + z_0 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_{r_a}$$

unde: $v_0 \cong 0, z_0 = h, v_2 = v, p_2 = p_0, z_2 = 0, h_{r_a}$ este pierderea de sarcină prin ajutoraj.

$$\text{Rezultă: } h = \frac{v^2}{2g} + h_{r_a} \quad (10.34)$$

Din formula vitezei prin ajutoraj $v = 0,82\sqrt{2gh}$, rezultă $\frac{v^2}{2g} = 0,82^2 h$ și deci:

$$h = 0,82^2 h + h_{r_a} \quad (10.35)$$

Rezultă că pierderea de sarcină prin ajutoraj este:

$$h_{r_a} \cong 0,33h \quad (10.36)$$

Comparativ cu pierderea de sarcină prin orificiu $0,04 \cdot h$ se observă o creștere de circa 8 ori, ceea ce implică o scădere a presiunii fluidului și implicit o creștere a vitezei și a debitului acestuia.

10.8. Jeturi de fluid

Rezultatul curgerii fluidelor prin orificii sau ajutaje, este un jet de fluid care se dezvoltă diferit în funcție de condițiile din aval.

După natura fluidului în care pătrunde jetul, deosebim două tipuri de jeturi:

- jeturi înecate, dacă vâna de fluid pătrunde într-un mediu de aceeași natură cu jetul (gaz – gaz, lichid - lichid);
- jeturi neînecate, dacă cele două medii au naturi diferite.

După felul regimului de mișcare din jet, deosebim:

- jet laminar, când curgerea este laminară, $Re < Re_{cr}$;
- jet turbulent, când mișcarea este turbulentă.

După modul de raportare la pereții solizi ai rezervoarelor deosebim:

- jeturi libere, care au contururile neperturbate de prezența pereților solizi;
- jeturi forțate, a căror contururi sunt perturbate de contactul cu pereții solizi.

a) Jeturi înecate

Considerăm un jet care iese dintr-un ajutor cu diametrul D_0 și care în secțiunea inițială are o distribuție uniformă a vitezelor (v_0), figura 58.

În contact cu fluidul înconjurător pe care îl antrenează treptat jetul inițial este el însuși modificat, distribuția de viteze se schimbă obținându-se două domenii ale jetului:

- un nucleu central cu secțiunea descrescătoare în sensul mișcării, care păstrează distribuția inițială de viteze;
- stratul limită, format de domeniul mărginit în interior de sâmburele central și în exterior de o suprafață aproximativ conică, de-a lungul căreia viteza în direcția jetului este nulă. Acest domeniu se continuă și dincolo de vârful nucleului central.

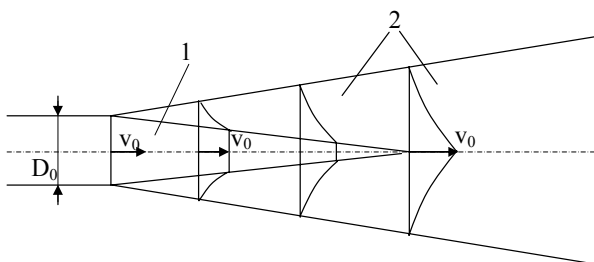


Fig. 58 Jet înecat

1-nucleu central, 2-strat limită

Vitezele longitudinale în jet scad de la valoarea v_0 din axul jetului odată cu creșterea razei, ajungând pe frontiera stratului limită să fie nulă.

Datorită antrenării fluidului înconjurător debitul jetului crește în lungul acestuia. Putem explica acest lucru prin schimbul de masă care se face datorită vitezei de pulsație din mișcarea turbulentă a jetului cu straturile de fluid vecine jetului.

b) *Jeturi neînecate*

Sunt jeturi care pătrund în fluide de natură diferită față de a lui. Din această categorie fac parte: jeturile de incendiu, jeturile aspersoarelor (pentru ploaie artificială), jeturile fântânilor artificiale, ș.a.

Jetul de lichid neîneecat, cuprinde trei zone distincte:

- o zonă compactă, care are un nucleu central și în care vitezele sunt mari. Această zonă cuprinde și un strat limită asemănător cu cel al jetului îneecat;
- o zonă de destrămare, care sub influența frecării cu aerul și a turbulenței interioare, contribuie la pătrunderea în interiorul jetului a bulelor de aer, care destramă jetul;
- o zonă a stropilor, în care vâna de fluid se destramă complet, sub formă de stropi.

c) *Jeturi parțial de fluide*

Sunt jeturi care au contururile limitate parțial de un perete solid, figura 59.

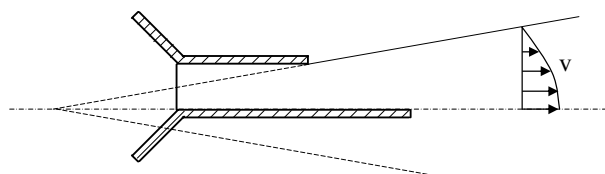


Fig. 59 Jet parțial limitat

Față de jetul liber interacțiunea dintre jet și mediul ambiant este asimetrică, concentrată printr-o distribuție asimetrică a vitezelor, datorită frecărilor mai mici exercitate de perete, în comparație cu mediul ambiant.

Dacă peretele ce limitează parțial jetului se abate de la direcția axială, sau de la forma rectilinie se face simțit efectul Coandă, prin care fluidul se atașează plăcii. Suprafața respectivă poartă numele de “volet Coandă”.

Dacă suprafața volet Coandă este suficient de lungă, locul particulelor transportate din spațiul dintre jet și volet, nu mai poate fi luat de particulele ce vin din afara acestui domeniu, iar depresiunea creată în acest fel, deviază curgerea în direcția voletului, figura 60.

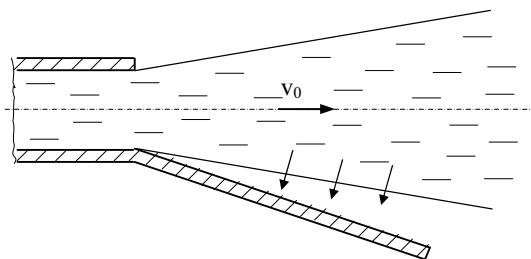


Fig. 60. Suprafața “volet Coandă”

11. MIȘCĂRI PERMANENTE ÎN CONDUCTE SUB PRESIUNE

Considerăm o conductă circulară alimentată de un rezervor suficient de mare ca să putem considera sarcina constantă. Conducta evacuează lichidul fie liber în atmosferă, fie într-un rezervor situat sub nivelul primului rezervor, figura 51.

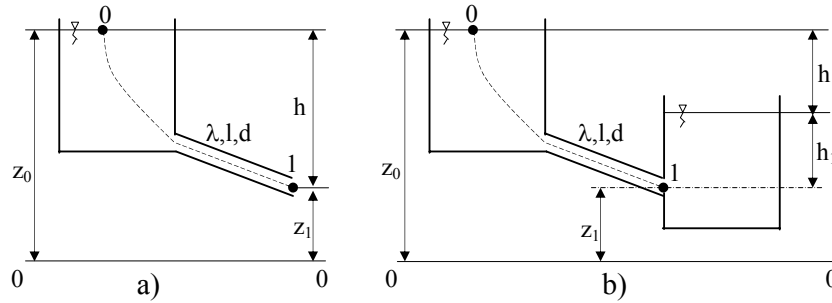


Fig. 51. Conductă sub sarcină constantă

- a) evacuare liberă în atmosferă
b) evacuare într-un alt rezervor

Ne propunem să determinăm o relație generală de calcul a vitezelor fluidelor prin conductă, luând în considerație pierderile de sarcină prin frecarea care se produce de-a lungul conductei.

Vom neglija frecările în interiorul rezervoarelor, datorită vitezelor reduse din interiorul acestora în comparație cu vitezele pe conductă.

În cazul a, aplicând relația lui Bernoulli între punctele 0 și 1, obținem:

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + z_0 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 + h_r$$

unde: $v_0 \cong 0$, $p_1 = p_0$, $v_1 = v$ (viteza pe conductă).

Relația lui Bernoulli, devine:

$$z_0 - z_1 = \frac{v^2}{2g} + h_r \quad (11.1)$$

$$\text{sau:} \quad h = \frac{v^2}{2g} + h_r \quad (11.2)$$

unde h este sarcina conductei.

În cazul b, în ecuația lui Bernoulli scrisă mai sus, vom efectua înlocuirile: $v_0 \cong 0$, $p_1 = p_0 + \gamma h_1$, $v_1 = v$ și vom obține:

$$z_0 - (z_1 - h_1) = \frac{v^2}{2g} + h_r \quad (11.3)$$

$$\text{sau:} \quad h = \frac{v^2}{2g} + h_r \quad (11.4)$$

unde h este sarcina conductei.

Putem face observația că sarcina conductei care debitează lichidul liber sau înecat este analoagă sarcinii unui orificiu liber sau înecat.

Pentru a putea utiliza relația în scopul determinării vitezei, va trebui să definim semnificația termenului h_r . Prin h_r vom înțelege toate pierderile de sarcină care se produc în conductă. Acestea sunt de trei categorii:

1) pierderea de sarcină h' la intrarea în conductă și pe o distanță de câteva diametre, unde conducta se comportă ca un ajutoraj. În consecință:

$$h' = h_{h_0} + h_{r_d} = 0,11 \frac{v^2}{2g} + 0,37 \frac{v^2}{2g} = 0,48 \frac{v^2}{2g} \cong 0,5 \frac{v^2}{2g} \quad (11.5)$$

2) pierderea de sarcină liniară pe întreaga lungime a conductei, h'' , care se calculează cu relația: $h'' = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$ (11.6)

3) pierderile de sarcină locale care se înregistrează la fiecare tip de rezistență hidraulică cum ar fi: schimbări de direcție, modificări bruște de secțiune, coturi simple sau duble, sau trecerea prin ventile montate pe conductă. Termenul acestor pierderi h''' se scrie sub forma:

$$h''' = \left(\sum_{i=1}^n \zeta_i \right) \frac{v^2}{2g} \quad (11.7)$$

unde ζ_i este coeficient de pierdere locală de sarcină.

Putem scrie: $h_r = h' + h'' + h'''$ (11.8)

Revenind la relația (11.4) obținem:

$$h = \frac{v^2}{2g} + 0,5 \frac{v^2}{2g} + \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \left(\sum_{i=1}^n \zeta_i \right) \frac{v^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} \left(1,5 + \lambda \frac{l}{d} + \sum_{i=1}^n \zeta_i \right) \quad (11.9)$$

și de aici formula de calcul a vitezei:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1,5 + \lambda \frac{l}{d} + \sum_{i=1}^n \zeta_i}} \quad (11.10)$$

de unde: $Q = \frac{\pi d^2}{4} v$

Relația (11.10) ține seama de toate categoriile de pierderi de sarcină și se numește formula exactă de determinare a vitezei.

Dacă conducta este foarte lungă astfel încât pierderile de sarcină liniare să aibă o pondere mare $\left(\lambda \frac{l}{d} > 1,5 + \sum_{i=1}^n \zeta_i \right)$ (cazul conductelor de alimentare cu apă), formula vitezei se simplifică:

$$v = \sqrt{\frac{2ghd}{\lambda l}} \quad (11.11)$$

și se numește formula vitezei pentru conducte lungi.

S-a determinat practic că o conductă poate fi considerată lungă, dacă îndeplinește condiția $l \geq 500 \cdot d$. În caz contrar ea se va numi scurtă, iar viteza se determină cu formula exactă.

În cazul conductelor lungi, sarcina conductei devine:

$$h \cong \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = h'' \quad (11.12)$$

Numim pantă hidrolică raportul $\frac{h''}{l} = \frac{h}{l} = I_h$ (11.13)

În funcție de relația (11.13) viteza într-o conductă lungă devine:

$$v = \sqrt{\frac{2gd}{\lambda} \frac{h}{l}} = \sqrt{\frac{2gd}{\lambda}} \sqrt{I_h} \quad (11.14)$$

iar debitul:

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} v = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{\frac{2gd}{\lambda}} \sqrt{I_h} = K(d, \lambda) \sqrt{I_h} \quad (11.15)$$

unde factorul K are dimensiune de debit și se numește modul de debit. Acest factor depinde de diametrul conductei și de coeficientul pierderilor liniare de sarcină. Deoarece conductele lungi sunt de regulă conducte ruгоase în sens hidrolic λ este funcție de rugozitatea relativă $\frac{\Delta}{d}$, deci modulul de debit depinde de diametrul conductei și de rugozitatea relativă a pereților acesteia.

În cataloagele hidrolice utilizate pentru calculul conductelor în funcție de diametrul și de tipul conductei se precizează valoarea modulului de debit.

Reciproc, impunându-se debitul unei conducte și cunoscând sarcina ei, putem dimensiona conducta stabilindu-i diametrul.

11.1. Calculul conductelor compuse în serie

Considerăm o conductă formată prin sudarea cap la cap a mai multor conducte de lungimi și diametre diferite, figura 52.

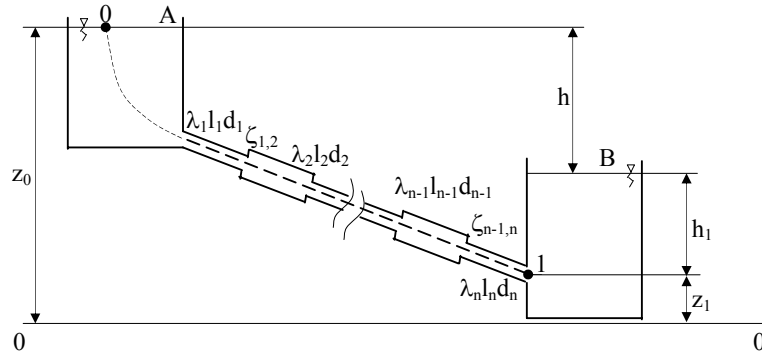


Fig. 52. Conductă compusă în serie

Conducta debitează lichidul între un rezervor superior A și un rezervor inferior B . Ne propunem să determinăm debitul conductei rezultante Q , precum și vitezele pe fiecare porțiune de conductă, $v_i (i=1, 2, \dots, n)$.

Trebuie să ținem seama de pierderile de sarcină și anume:

- pierderi locale de sarcină la intrarea în conductă;
- pierderi liniare de sarcină pe fiecare porțiune de conductă;
- pierderi locale de sarcină la trecerea de la un tronson la altul.

Aplicăm relația lui Bernoulli între punctele 0 și 1:

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + z_0 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 + 0,5 \frac{v_1^2}{2g} + \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \frac{v_1^2}{2g} + \zeta_{12} \frac{v_2^2}{2g} + \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \frac{v_2^2}{2g} + \dots + \lambda_n \frac{l_n}{d_n} \frac{v_n^2}{2g}$$

unde vom admite că sunt cunoscute λ_i , l_i , d_i , h , $\zeta_{i,i+1}$ iar:

$$p_0 + \gamma \cdot h_I = p_I, \quad v_0 \cong 0.$$

Relația lui Bernoulli, devine:

$$\frac{p_0}{\gamma} + z_0 = \frac{v_n^2}{2g} + \frac{p_0 + \gamma \cdot h_1}{\gamma} + z_1 + 0,5 \frac{v_1^2}{2g} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{l_i}{d_i} \frac{v_i^2}{2g} + \sum_{i=1}^n \zeta_{i,i+1} \frac{v_{i+1}^2}{2g} \text{ de unde:}$$

$$h = \frac{v_n^2}{2g} + 0,5 \frac{v_1^2}{2g} + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{l_i}{d_i} \frac{v_i^2}{2g} + \sum_{i=1}^n \zeta_{i,i+1} \frac{v_{i+1}^2}{2g} \quad (11.16)$$

Pentru obținerea debitului care este același, în baza ecuației de continuitate, vom utiliza relația:

$$Q_i = v_i \frac{\pi \cdot d_i^2}{4} = Q$$

$$\text{de unde: } v_i = \frac{4Q_i}{\pi \cdot d_i} \quad (11.17)$$

$$\frac{1}{2g} v_i^2 = \frac{16Q^2}{\pi^2 \cdot d_i^4 \cdot 2g} = \frac{8Q^2}{\pi^2 g \cdot d_i^4} = \alpha_i Q^2$$

Relația (11.16) devine:

$$h = \alpha_n Q^2 + 0,5 \cdot \alpha_1 Q^2 + \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{l_i}{d_i} \alpha_i \right) Q^2 + \left(\sum_{i=1}^n \zeta_{i,i+1} \alpha_{i+1} \right) Q^2 \quad (11.18)$$

de unde:

$$Q = \sqrt{\frac{h}{\alpha_n + 0,5 \cdot \alpha_1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{l_i}{d_i} \alpha_i + \sum_{i=1}^n \zeta_{i,i+1} \alpha_{i+1}}} \quad (11.19)$$

12.2. Calculul conductelor compuse în paralel

Considerăm n conducte având extremitățile A și B comune, figura 53.

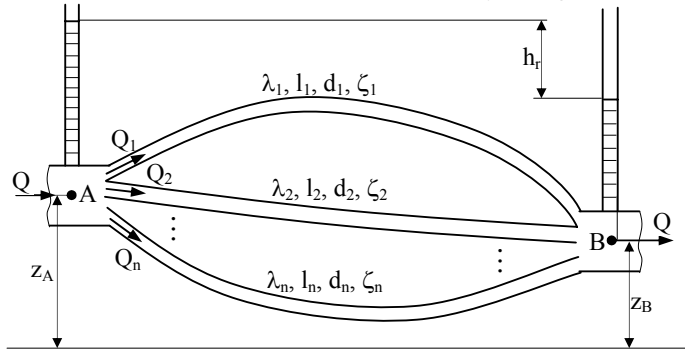


Fig.53. Conductă compusă în paralel

Admitem că sunt cunoscute elementele $\lambda_i, l_i, d_i, \zeta_i$ ($i=1,2,\dots,n$), unde prin ζ_i am însumat coeficienții tuturor rezistențelor hidraulice de pe conducta i . Vom demonstra mai întâi că pierderea de sarcină liniară datorată frecărilor de-a lungul oricărei conducte este aceeași. Pentru aceasta, vom scrie relația lui Bernoulli între punctele A și B , de-a lungul unei linii de curent care este conținută în conducta i :

$$\frac{v_A^2}{2g} + \frac{p_A}{\gamma} + z_A = \frac{v_B^2}{2g} + \frac{p_B}{\gamma} + z_B + h_{r_i}$$

$$\text{de unde: } h_{r_i} = \frac{v_A^2 - v_B^2}{2g} + \frac{p_A - p_B}{\gamma} + z_A - z_B = Ct. \quad (11.20)$$

Pierderea de sarcină de mai sus se poate determina cunoscând debitul Q înainte și după ramificare și măsurând presiunea în punctele A și B . Notând această pierdere cu h_r se poate exprima și astfel:

$$h_r = \lambda_i \frac{l_i}{d_i} \frac{v_i^2}{2g} + \zeta_i \frac{v_i^2}{2g} \quad (11.21)$$

Viteza v_i poate fi exprimată în funcție de debitul prin conducta respectivă:

$$v_i = \frac{4Q_i}{\pi \cdot d_i^2}, \quad \frac{v_i^2}{2g} = \frac{16Q_i^2}{2g\pi^2 d_i^2} = \frac{8Q_i^2}{g\pi^2 d_i^2} = \alpha_i Q_i^2 \quad (11.22)$$

Rezultă:

$$h_r = \alpha_i Q_i^2 \left(\lambda_i \frac{l_i}{d_i} + \zeta_i \right) \quad (11.23)$$

$$\text{de unde: } Q_i = \sqrt{\frac{h_r}{\alpha_i \left(\lambda_i \frac{l_i}{d_i} + \zeta_i \right)}} \quad (11.24)$$

Folosind ecuația de continuitate $Q = \sum_{i=1}^n Q_i$, obținem:

$$Q = \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{h_r}}{\sqrt{\alpha_i \left(\lambda_i \frac{l_i}{d_i} + \zeta_i \right)}} = \sqrt{h_r} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{\alpha_i \left(\lambda_i \frac{l_i}{d_i} + \zeta_i \right)}}$$

Exprimând pe h_r și apoi pe Q_i , obținem:

$$\sqrt{h_r} = \frac{Q}{\sum_{i=1}^n \sqrt{\alpha_i \left(\lambda_i \frac{l_i}{d_i} + \zeta_i \right)}} \quad \text{și} \quad Q_i = \frac{Q}{\sum_{i=1}^n \sqrt{\alpha_i \left(\lambda_i \frac{l_i}{d_i} + \zeta_i \right)}} \quad (11.25)$$

12.3. Calculul conductelor cu debit continuu și terminal

Considerăm o conductă lungă, de lungime l și diametru d , alimentată la un rezervor, care furnizează la capătul ei un debit terminal Q_t și distribuie în lungul ei debitul continuu Q_c , figura 54. Numim debit specific debitul distribuit pe unitatea de lungime de conductă, adică $q = \frac{Q_c}{l}$. Ne propunem să determinăm sarcina necesară h a conductei, care asigură

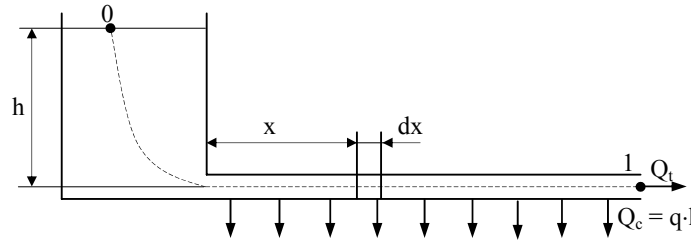


Fig. 54. Conductă cu debit continuu și terminal

aceste debite. Pentru aceasta vom scrie relația lui Bernoulli între punctele 0 și 1:

$$\frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + z_0 = \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 + h_r$$

în care: $v_0 \cong 0$, $z_0 = h$, $v_1 = \frac{4Q_t}{\pi \cdot d^2}$, $p_1 = p_0$, $z_1 = 0$.

După înlocuiri ecuația devine:

$$\frac{p_0}{\gamma} + h = \frac{16Q_t^2}{2\pi^2 g d^4} + \frac{p_0}{\gamma} + h_r \quad (11.26)$$

$$\text{de unde: } h = \frac{8Q_t^2}{\pi^2 g d^4} + h_r \quad (11.27)$$

Trebuie să determinăm expresia pierderii de sarcină h_r . Pentru aceasta, vom considera un element de conductă de lungime dx , situat la distanța x de rezervor. Pentru acest element infinitesimal de conductă putem admite că debitul rămâne constant și anume:

$$Q(x) = Q_t + q(l - x) = Q_t + q \cdot l - q_x = Q_t + Q_c - \frac{x}{l} Q_c$$

Pierderea elementară de sarcină pe acest element de conductă va fi:

$$dh_r = \lambda \frac{dx}{d} \frac{v^2(x)}{2g} \quad (11.28)$$

$$\text{Dar: } v(x) = \frac{4Q(x)}{\pi \cdot d^2}$$

$$\text{de unde: } \frac{v^2(x)}{2g} = \frac{16Q^2(x)}{2\pi^2 g d^4} = \frac{8}{\pi^2 g d^4} Q^2(x)$$

Pierderea elementară de sarcină devine:

$$dh_r = \lambda \frac{dx}{d} \frac{8}{\pi^2 g d^4} Q^2(x) = \frac{8\lambda}{\pi^2 g d^5} Q^2(x) dx \quad (11.29)$$

Pierdere totală de sarcină prin frecări de-a lungul conductei, se obține prin integrare:

$$\begin{aligned} h_r &= \int_0^l \frac{8\lambda}{\pi^2 g d^5} Q^2(x) dx = \frac{8\lambda}{\pi^2 g d^5} \int_0^l \left[(Q_t + Q_c)^2 - 2(Q_t + Q_c) \frac{x}{l} Q_c + \frac{Q_c^2}{l^2} x^2 \right] dx = \\ &= \frac{8\lambda}{\pi^2 g d^5} \left[(Q_t + Q_c)^2 l - (Q_t + Q_c) Q_c l + Q_c^2 \frac{l}{3} \right] = \frac{8\lambda}{\pi^2 g d^5} \left[Q_t^2 + 2Q_t Q_c + Q_c^2 - Q_t Q_c - Q_c^2 + \frac{Q_c^2}{3} \right] = \\ &= \frac{8\lambda}{\pi^2 g d^5} \left[Q_t^2 + Q_t Q_c + \frac{Q_c^2}{3} \right] \end{aligned} \quad (11.30)$$

Înlocuind în relația (11.27) rezultă sarcina necesară a conductei.

În cazul în care debitul terminal este nul ($Q_t = 0$), relația pierderii de sarcină devine:

$$h_r = \frac{8\lambda l}{\pi^2 g d^5} \frac{Q_c^2}{3} \quad (11.31)$$

În cazul când conducta ar furniza debitul Q_c , numai la capătul terminal, pierderea de sarcină se determină cu relația:

$$h_r = \frac{8\lambda l}{\pi^2 g d^5} Q_c^2 \quad (11.32)$$

Se observă că față de această ultimă situație, pierderea de sarcină în cazul distribuirii continue a debitului este de trei ori mai mică. Rezultatul se explică calitativ prin faptul că variind debitul în mod continuu de-a lungul conductei scade viteza și implicit pierderea de sarcină care variază cu pătratul vitezei.

11.4. Calculul conductelor în sifon

Considerăm două rezervoare A și B, legate printr-o conductă supraînălțată față de rezervorul superior, figura 55.

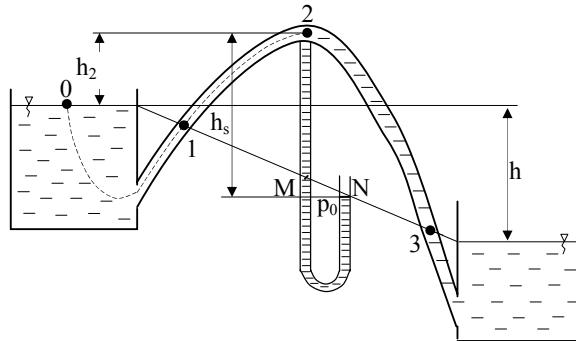


Fig. 55. Conductă în sifon

Se observă că linia piezometrică a rezervoarelor intersectează conducta. Numim conductă în sifon o porțiune de conductă situată deasupra liniei de sarcină piezometrică. Deoarece la nivelul liniei de sarcină piezometrică presiunea este constantă (presiunea

atmosferică), deasupra acestei linii avem presiuni mai mici decât presiunea atmosferică. Într-adevăr scriind relația lui Bernoulli între punctele 1 și 2, vom avea: unde $z_1 \cong 0$, $p_1 = p_0$, $v_1 = v_2$ (conducta are diametrul constant).

$$\text{Rezultă: } \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_{r_{1-2}}$$

$$\frac{p_0}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_{r_{1-2}} \quad (11.33)$$

$$\text{și: } p_2 = p_0 - \gamma(z_2 + h_{r_{1-2}}) < p_0 \quad (11.34)$$

Circulația lichidului între 1 și 2 are drept cauză principală diferența de presiune dintre aceste puncte, care provoacă aspirația lichidului către punctul 2, învingând greutatea lichidului între cele două puncte. Pe porțiunea descendentă de conductă, între punctele 2 și 3, observăm că lichidul se scurge de la o presiune mică la una mai mare, curgerea având drept cauză principală gravitația și energia cinetică a fluidului din punctul 2.

Conductele în sifon se utilizează atunci când legătura directă dintre rezervoare este împiedicată de un obstacol. Pentru conductele în sifon problemele sunt următoarele:

- determinarea debitului conductei;
- stabilirea lungimii maxime a porțiunii de conductă dintre punctele 1 și 2, astfel încât în punctul superior să avem $p_2 \geq p_{\text{vaporizare}}$;
- înălțimea de sifonaj, h_s .

Pentru rezolvarea primei probleme, se aplică formula vitezei într-o conductă:

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1,5 + \lambda \frac{l}{d} + \sum_{i=1}^n \zeta_i}} \quad (11.35)$$

$$\text{de unde: } Q = \frac{\pi \cdot d^2}{4} v \quad (11.36)$$

Pentru determinarea lungimii maxime l_1 între punctele 1 și 2, se scrie relația lui

$$\text{Bernoulli între punctele 0 și 2: } \frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + z_0 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + h_{r_{0-2}}$$

$$\text{unde: } v_0 \cong 0, z_0 = 0, v_2 = v, p_2 = p_{\text{vap.}}, z_2 = h_2, h_{r_{1-2}} = \lambda \frac{l_1}{d} \frac{v^2}{2g} \text{ și rezultă pentru } l_1 \text{ o}$$

ecuație de gradul 1 în h . Pentru o lungime mai mare decât l_1 , presiunea în punctul 2 scade sub cea de vaporizare și lichidul devine bifazic existând pericolul cavitației.

Pentru rezolvarea celei de-a treia probleme considerăm montat în dreptul punctului 2 un piezometru, în care pătrunde lichidul în conductă. În punctul M de intersecție dintre linia de sarcină piezometrică și acest tub, presiunea va fi $p_M = p_0$.

Scriind ecuația fundamentală a hidrostaticii între punctele 2 și M, rezultă:

$$p_M = p_2 + \gamma \cdot h_s$$

$$\text{de unde: } h_s = \frac{p_M - p_2}{\gamma} = \frac{p_0 - p_2}{\gamma} \quad (11.37)$$

și se numește înălțime de sifonaj. Valoarea maximă a acestei înălțimi rezultă din

$$\text{condiția } p_2 \geq p_{\text{vap.}}, \text{ de unde: } h_s = \frac{p_0 - p_2}{\gamma} \leq \frac{p_0 - p_{\text{vap.}}}{\gamma} \quad (11.38)$$

12. MIȘCAREA NEPERMANENTĂ ÎN CONDUCTE SUB PRESIUNE

Regimul nepermanent de mișcare este un caz frecvent întâlnit în funcționarea instalațiilor hidraulice. El apare la pornirea sau oprirea unei instalații, la schimbarea regimului de funcționare, la avarii, prin obturarea bruscă a curgerii prin organe de închidere cum ar fi: robinete, vane, pale statorice sau rotorice în cazul turbinelor, etc.

În timpul mișcărilor nepermanente sub presiune pot apare solicitări mari ale instalațiilor datorate suprapresiunilor care pot depăși de câteva ori sau zeci de ori presiunea în regimul permanent. Studiul acestui regim nepermanent de curgere este necesar pentru o mai bună proiectare a instalațiilor hidraulice.

Dintre mișcările nepermanente în conducte sub presiune cele mai importante sunt: lovitură de berbec, oscilațiile în masă și mișcările sonice.

Lovitura de berbec este un fenomen rapid variabil, caracterizat prin apariția și propagarea sub formă de unde a unor variații mari de presiune în conducte cu lichide ca rezultat a obturării bruște a conductei, care impune luarea în considerație a compresibilității lichidului. Ca exemple, putem da conducta forțată a unei uzine hidroelectrice, figura 56 a, sau conducta de refulare a unei pompe figura 56 b.

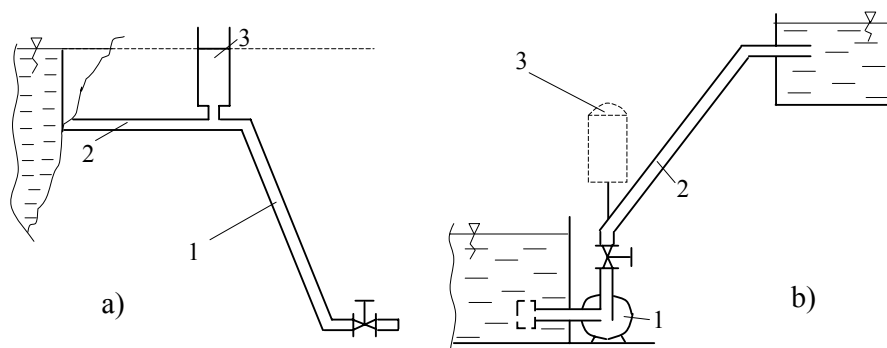


Fig. 56 Instalații în care se manifestă fenomenul “lovitură de berbec”

a) amenajare hidroenergetică

1- conductă forțată, 2- tunel de aducțiune, 3- castel de echilibru.

b) instalație de pompare

1- pompă, 2- conductă de refulare, 3- hidrofor.

Prin obturarea conductei forțate sau prin oprirea pompei se creează presiuni sau depresiuni mari care se propagă în lungul conductelor, solicitând puternic conducta respectivă.

Oscilațiile în masă sunt mișcări lent variabile ale lichidului la care se neglijează compresibilitatea lichidului și care sunt o consecință a măsurilor de protecție împotriva fenomenului loviturii de berbec. Astfel pentru conducta forțată există un castel de echilibru, iar pentru conducta de refulare a unei pompe există un hidrofor care este un rezervor închis, care conține în partea lui superioară o pernă elastică cu aer comprimat. Lovitura de berbec se transformă în oscilații de masă, mult mai lente și cu variații de presiune mult mai mici.

Mișcările sonice sunt reprezentate de undele de presiune care se produc în conducte și care se propagă cu viteza sunetului, transportând energie. Tehnica folosirii mișcărilor sonice ale fluidelor pentru transportul de energie sau alte aplicații practice face obiectul unei științe fondate de marele savant de origine română Gogu Constantinescu și se numește sonicitate.

12.1. Lovitura de berbec în conducte sub presiune

Considerăm o conductă de diametru constant, alimentată la un rezervor suficient de mare astfel încât sarcina conductei să fie constantă. Facem ipoteza că fluidul este lipsit de viscozitate și materialul conductei este perfect elastic. Manevra bruscă de închidere a vanei provoacă o mișcare nepermanentă, a cărei determinare ne propunem să o analizăm.

Prima particulă de lichid care se oprește este cea din dreptul vanei A , figura 57.

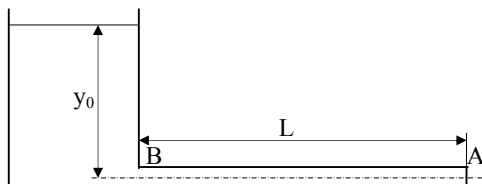


Fig. 57. Conductă sub sarcină constantă

Viteza straturilor de lichid din imediata apropiere a vanei se anulează, energia cinetică transformându-se în lucru mecanic de natură elastică prin comprimarea coloanei de apă și dilatarea pereților conductei. Comprimarea treptată a coloanei de lichid este echivalentă cu propagarea de la vana A spre rezervor a creșterii de presiune Δp , cu viteza a . Timpul în care suprapresiunea Δp parcurge lungimea L a conductei este $\frac{L}{a}$. În momentul $t = \frac{L}{a}$ întreaga coloană de lichid este comprimată și în repaus, situație care nu este stabilă, deoarece o particulă din secțiunea rezervorului are pe una din fețe presiunea $p_0 + \Delta p$, iar pe fața opusă (dinspre rezervor) presiunea p_0 , corespunzătoare înălțimii lichidului din rezervor. Datorită acestei diferențe de presiune începe o mișcare spre rezervor cu o viteză egală cu viteza mișcări permanente v_0 ; mișcarea se propagă de la B spre A din aproape în aproape cu viteza a . După timpul $t = \frac{2L}{a}$ se află în starea de mișcare permanentă, dar se găsește în mișcare cu viteza $-v_0$.

Imediat după atingerea timpului $t = \frac{2L}{a}$ datorită deplasării cu viteza $-v_0$, se creează o depresiune în secțiunea vanei, $-\Delta p$. Continuă astfel decompresia lichidului (dilatarea sa) din aproape în aproape, până la timpul $t = \frac{3L}{a}$, depresiunea propagându-se de la A spre B cu viteza a , toată coloana de lichid fiind în acest moment dilatată și în repaus. Această stare nu poate fi stabilă deoarece ultima particulă care s-a dilatat din dreptul rezervorului suportă o suprapresiune din partea rezervorului, Δp . Din acest moment începe mișcarea de la rezervor spre vană cu viteza v_0 și lichidul se comprimă iar din aproape în aproape de la B la A , până la momentul $t = \frac{4L}{a}$ când masa lichidului revine la starea normală dinaintea închiderii vanei. Fenomenul se repetă periodic, cu perioada $\frac{4L}{a}$.

Variația presiunii din secțiunea conductei din dreptul vanei este reprezentată în figura 58.

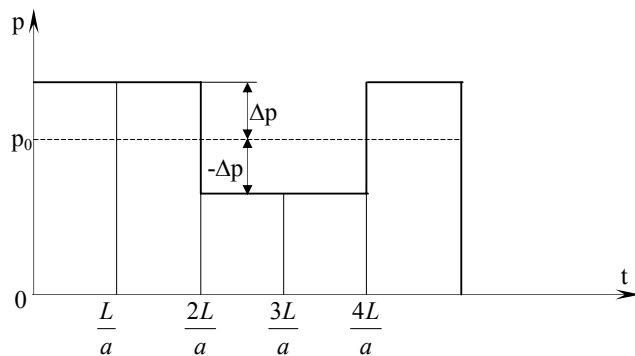


Fig. 58. Variația presiunii în dreptul vanei

Lovitura de berbec constă în apariția și propagarea în lungul conductei a unei suprapresiuni, alternativ pozitive și negative, $+\Delta p$ și $-\Delta p$, care se adaugă presiunii existente în conductă înainte de lovitura de berbec.

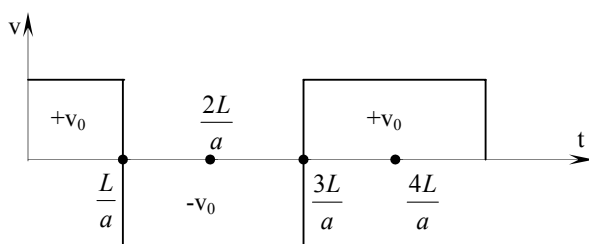


Fig. 59. Variația vitezei în dreptul rezervorului

12.2. Ecuațiile fenomenului lovitura de berbec

Variațiile de presiune sunt rezultatul transformării energiei cinetice a lichidului în lucru mecanic de deformare la oprirea bruscă a curgerii, deformare posibilă datorită proprietății de compresibilitate a lichidului. Variația vitezei în secțiunea conductei în dreptul rezervorului este reprezentată în figura 59.

Considerăm o conductă cu diametrul interior d , alimentată la un rezervor în care lichidul are nivelul suprafeței libere la cota y_0 , figura 60.

Peretele conductei are grosimea δ și modulul de elasticitate E . Lichidul are greutatea specifică γ , densitatea ρ și modulul de elasticitate ε . În studiul analitic al fenomenului urmărim determinarea variației în timp a vitezei și presiunii lichidului, a variației în spațiu de-a lungul conductei:

$$v = v(x, t); \quad p = p(x, t) \quad (12.1)$$

Deoarece presiunea poate fi exprimată în funcție de înălțimea coloanei de lichid, putem considera ca funcții necunoscute $v(x, t)$ și $y(x, t)$.

Aplicăm legea fundamentală a dinamicii $m\bar{a} = \sum_{i=1}^n \bar{F}$, pe care o proiectăm pe direcția de mișcare, Ox , pentru o particulă de lichid de lungime dx .

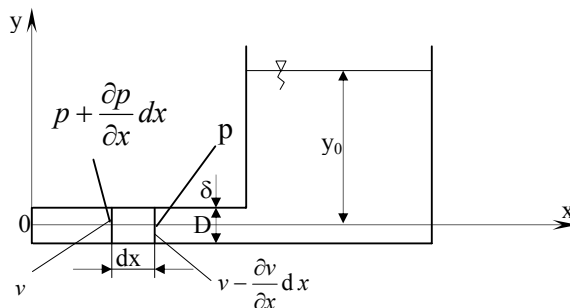


Fig. 60. Conductă cu sarcină constantă

Masa particulei elementare este $\rho \frac{\pi D^2}{4} dx$. Proiecția accelerației pe direcția axei

conductivei este $\frac{dv}{dt}$ iar ținând cont că $\bar{v} = \bar{v}(x, t)$, rezultă:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (12.2)$$

Variația vitezei în timp este cu mult mai importantă decât variația vitezei în spațiu, așa cum rezultă din analiza fenomenului loviturii de berbec, deci putem neglija $\frac{\partial v}{\partial x}$ față de $\frac{\partial v}{\partial t}$. Rezultă pentru accelerația mișcării particulei expresia:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} \quad (12.3)$$

Forțele exterioare care acționează asupra particulei de lichid sunt forțele masice și forțele de presiune, în ipoteza neglijării forțelor de viscozitate. Pe direcția Ox acționează doar forțele de presiune a căror rezultantă este:

$$\frac{\pi D^2}{4} \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) - \frac{\pi D^2}{4} p = \frac{\pi D^2}{4} \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

Rezultă:

$$\rho \frac{\pi D^2}{4} dx \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\pi D^2}{4} \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

sau, după simplificări și ținând seama de expresia presiunii $p = \rho \cdot g \cdot y$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g \frac{\partial y}{\partial x} \quad (12.4)$$

Exprimăm în continuare ecuația continuității ținând cont de dilatarea conductei și comprimarea lichidului. Variația totală a volumului particulei fluide de lungime dx , figura 60 este dată de variația volumului datorită dilatării conductei din care scădem variația volumului datorită comprimării lichidului:

$$dv_{tot} = dv_{dil} - dv_{compr}$$

Variația totală a volumului are expresia:

$$d v_{tot} = (Q_{int} - Q_{ies}) dt = \frac{\pi D^2}{4} \left[v - \left(v - \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) \right] dt =$$

$$= \frac{\pi D^2}{4} \frac{\partial v}{\partial x} dx dt$$

Variația volumului particulei, datorită dilatării conductei este:

$$d v_{dil} = \pi D \frac{d D}{2} dx \quad (12.5)$$

în care creșterea diametrului dD , se obține din legea lui Hooke $\frac{dD}{D} = \frac{d\sigma}{E}$, unde $d\sigma$ se calculează din formula cazanelor cilindrice $d\sigma = \frac{D \cdot dp}{2\delta}$.

Rezultă:

$$d V_{dil} = \pi D \frac{d D}{2} dx = \frac{\pi}{2} \frac{d\sigma \cdot D^2}{E} dx = \frac{\pi D^3}{4\delta E} dp dx \quad (12.6)$$

În expresia diferențialei totale a presiunii $dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial t} dt$, putem neglija termenul care conține pe $\frac{\partial p}{\partial x}$, deoarece variația presiunii în timp este mult mai importantă decât variația presiunii în spațiu $\left(\frac{\partial p}{\partial t} \gg \frac{\partial p}{\partial x} \right)$.

Se obține creșterea de volum:

$$d V_{dil} = \frac{\pi D^3}{4\delta E} \frac{\partial p}{\partial t} dt dx$$

Variația volumului particulei datorită comprimării lichidului, adică o micșorare a volumului particulei este:

$$d V_{compr} = -\frac{1}{\varepsilon} V dp = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\pi D^2}{4} dx \frac{\partial p}{\partial t} dt$$

sau, după simplificări și ținând seama de relația $p = \rho \cdot g \cdot y$, rezultă:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{E} \frac{D}{\delta} \right) \cdot \rho \cdot g \frac{\partial y}{\partial t}$$

Facem următoarea notație:

$$\frac{g}{a^2} = \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{E} \frac{D}{\delta} \right) \cdot \rho \cdot g$$

$$\text{și se obține: } \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{g}{a^2} \frac{\partial y}{\partial t} \quad (12.7)$$

Din sistemul format din ecuațiile (12.4) și (12.7), putem determina variația presiunii și a vitezei. Pentru a determina variația presiunii, respectiv a înălțimii y , eliminăm viteza, derivând ecuația (12.4) în raport cu x și ecuația (12.7) în raport cu t ; se obține:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (12.8)$$

Relația (12.8) se numește ecuație de propagare. Este o ecuație cu derivate parțiale de ordinul II, liniară, omogenă, cu coeficienți constanți, de tip hiperbolic. Ecuația

(12.8), este cunoscută în teoria mecanicii drept ecuația coardei vibrante sau a undelor plane.

Dacă derivăm ecuația (12.4) funcție de t și ecuația (12.7) funcție de x , se elimină y și obținem:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (12.9)$$

Se constată că viteza $v(x,t)$ și $p(x,t) = \rho g y(x,t)$, verifică același tip de ecuație cu derivate parțiale, ecuația coardei vibrante.

Condițiile inițiale impuse sunt:

$$t = 0 \text{ rezultă } v = v_0 \text{ și } p = \rho g y_0 \quad (12.10)$$

Condițiile la limită impuse sunt:

$$x = 0 \text{ rezultă } v = 0 \text{ și } x = L \text{ rezultă } y = y_0 \quad (12.11)$$

adică în secțiunea vanei viteza este nulă, iar în rezervor înălțimea lichidului rămâne constantă în timp (se neglijează eventualele oscilații de nivel) ceea ce se poate face în cazul rezervoarelor mari.

12.3. Soluțiile generale ale ecuațiilor cu derivate parțiale ale fenomenului lovitura de berbec

Presiunea $y(x,t)$ și viteza $v(x,t)$, verifică ecuațiile cu derivate parțiale (12.4) și (12.7), sau ecuația coardei vibrante:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

Ecuația coardei vibrante poate fi integrată prin metoda schimbării variabilelor. Se face schimbarea de variabile:

$$\xi = t - \frac{x}{a}, \quad \eta = t + \frac{x}{a}$$

și obținem:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \text{ sau } \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \right) = 0$$

de unde rezultă: $\frac{\partial y}{\partial \eta} = \varphi(\eta)$

$$\text{sau: } y - y_0 = \int \varphi(\eta) d\eta + F(\xi) = -f(\eta) + F(\xi) \quad (12.12)$$

Revenind la variabilele inițiale, rezultă:

$$y = y_0 + F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right) \quad (12.13)$$

în care F și f sunt funcții arbitrare.

Pentru determinarea funcției $v(x,t)$, derivăm expresia (12.13) a lui $y(x,t)$ în raport cu x : $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{a} F'(\xi) - \frac{1}{a} f'(\eta)$ și se introduce în relația (12.4), obținând:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{g}{a} [F'(\xi) + f'(\eta)] \text{ sau, după integrare:}$$

$$v = v_0 - \frac{g}{a} \left[F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right) \right] \quad (12.14)$$

Relațiile (12.13) și (12.14) sunt cunoscute sub denumirea de formulele lui Allievi.

Funcțiile $F\left(t - \frac{x}{a}\right)$, $f\left(t + \frac{x}{a}\right)$ și mărimea a pot primi interpretări fizice. Dacă se atribuie funcției arbitrare $f\left(t + \frac{x}{a}\right)$ valoarea zero, atunci relația (12.13) poate fi scrisă sub forma:

$$F\left(t - \frac{x}{a}\right) = y - y_0 = \frac{p - p_0}{\gamma} = \frac{\Delta p}{\gamma}$$

deci funcția $F\left(t - \frac{x}{a}\right)$ este egală cu creșterea de presiune din fenomenul loviturii de berbec. Știind că suprapresiunea $\frac{\Delta p}{\gamma}$ poate fi întâlnită la momentul t_1 într-un punct x_1 al conductei și într-un alt moment t_2 în punctul x_2 , putem scrie:

$$\left(\frac{\Delta p}{\gamma}\right)_{x_1, t_1} = \left(\frac{\Delta p}{\gamma}\right)_{x_2, t_2} \quad \text{sau} \quad F\left(t_1 - \frac{x_1}{a}\right) = F\left(t_2 - \frac{x_2}{a}\right) \quad (12.15)$$

Deoarece funcția F este uniformă, putem scrie:

$$t_1 - \frac{x_1}{a} = t_2 - \frac{x_2}{a} \quad (12.16)$$

sau: $x_2 - x_1 = a(t_2 - t_1)$ (12.17)

care reprezintă spațiul într-o mișcare rectilinie și uniformă cu viteza a ; rezultă că a este viteza de propagare a loviturii de berbec. Funcția F reprezintă unda directă.

Dacă procedăm în mod analog considerând funcția F nulă, obținem:

$$x_2 - x_1 = -a(t_2 - t_1) \quad (12.18)$$

deci funcția f reprezintă unda reflectată sau inversă.

Pentru a calcula viteza de propagare a loviturii de berbec, revenim la notația făcută la paragraful precedent:

$$\frac{g}{a^2} = \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{E} \frac{D}{\delta}\right) \cdot \rho \cdot g \quad (12.19)$$

Se poate verifica ușor că mărimea a are dimensiuni de viteză. Membrul drept al egalității are dimensiunea $\frac{[g]}{[\varepsilon]} = \frac{FL^{-3}}{FL^{-2}} = L^{-1}$.

Deci $[a^2] = \frac{[g]}{L^{-1}} = L^2 T^{-2}$, de unde $[a] = L \cdot T^{-1}$.

Din formula (12.19) rezultă:
$$a = \sqrt{\frac{g}{\gamma \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{E} \frac{D}{\delta}\right)}}$$

sau:
$$a = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}}}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{E} \frac{D}{\delta}}} = \frac{1425}{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{E} \frac{D}{\delta}}} \quad (12.20)$$

unde: $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho}} = 1425 \frac{m}{s}$ și reprezintă viteza de propagare a sunetului în apă.

Relația (12.20) poate fi scrisă și sub forma dată de Allievi:

$$a = \frac{9900}{\sqrt{48,3 + k \frac{D}{\delta}}} \quad (12.21)$$

în care coeficientul k este o constantă a cărei valoare numerică depinde de natura materialului conductei ($k = 0,5$ pentru oțel, $k = 5$ pentru beton sau plumb, $k = 10$ pentru lemn etc.).

BIBLIOGRAFIE

1. Anton, V., Popoviciu, M., Fitere, I. *Hidraulică și mașini hidraulice*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1978.
2. Ciobanu, C., s.a. *Îndrumar de laborator de hidraulică și mașini hidraulice*, Institutul Politehnic Iași, Facultatea de Mecanică, vol. I (Hidraulică), 1971.
3. Cioc, D. *Mecanica fluidelor*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1967.
4. Cioc, D. *Hidraulica*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1975.
5. Dumitrescu, D. *Hidraulica*, În : *Manualul inginerului*, vol. II, p. 231-289. Editura Tehnică, București, 1966.
6. Dumitrescu, D. și Iamandi, C. *Hidraulica*. În: *Manualul inginerului hidrotehnician*, vol. II, p.117-278. Editura Tehnică, București, 1969.
7. Dumitrescu, D. și Ernest Răzvan. *Disiparea energiei și disipatori de energie*. Editura Tehnică, București, 1972.
8. Florea, Julieta și Zidaru, Gh. *Bazele hidraulicii. Culegere de probleme*. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1969.
9. Florea, Julieta și Izbășoiu, C., E. *Hidraulica și mașini hidraulice* (litografiat). Institutul Politehnic București, 1974.
10. Florea, J., Panaitescu, V. *Mecanica fluidelor*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
11. Florescu Iulian *Mecanica fluidelor și mașini hidrapneumatice* Editura Alma Mater Bacău, 2000, ISBN 973-99703-0-3.
12. Florescu Iul., Florescu D., Olaru Ionel, *Mecanica fluidelor și mașini hidraulice*. Îndrumar de laborator, Editura Tehnica Info Chișinău, 2003 ISBN 9975-63-222-X.
13. Florescu Iulian, Florescu Daniela, *Hidraulica* Editura Tehnica Info Chișinău, 2006, ISBN 978-9975-63-282-9
14. Ionescu, E., M., Stoicescu, Maria *Hidraulică generală. Îndrumar de laborator*, Institutul de Petrol și Gaze, Ploiești 1989.
15. Ionescu, D., Isbășoiu, E. *Mecanica fluidelor și mașini hidraulice*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1980.
16. Ionescu, Dan, Gh. *Introducere în hidraulică*, Editura Tehnică, București, 1977.
17. Marinov, Anca, Maria *Mecanica fluidelor și mașini hidropneumatice*, (partea întâi), Universitatea "Politehnica", București 1993.
18. Marinov, Anca, Maria *Mecanica fluidelor și mașini hidropneumatice*, (partea a doua), Universitatea "Politehnica", București 1994.
19. Mateescu, C. *Hidraulica*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1961.
20. Matei, P. *Mecanica fluidelor și mașini hidraulice*, I. P. Iași, 1979.
21. Oprean, V. *Acționări hidraulice*, Editura Tehnică, București, 1976.
22. Oroveanu, T. *Mecanica fluidelor vâscoase*, Editura Academiei, București, 1967.
23. Pavel, Dorin. *Mașini hidraulice*, 2 vol., Editura Energetică de Stat, București, 1955 (vol I) – 1956 (vol II).

24. Pavel, Dorin. *Stații de pompare și rețele de transport hidraulic*. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1964.
25. Pavel, D., Zarea, Șt. *Turbine hidraulice și echipamente hidroenergetice*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1968.
26. Reynolds, A., J. *Turbulent Flows in Engineering*. John Wiley & Sons, London, 1974.
27. Robescu, Dan și Robescu, Diana. *Dinamica fluidelor polifazate, transport și depoluare. Îndrumar de laborator*, Universitatea Politehnică București, 1995.
28. Zidaru, Gh. *Hidrodinamica rețelelor de profile* (litografiat), Institutul Politehnic București, 1974.